Énoncé

Exercice sur 5 points

La plaine de Sorques, située dans le sud de la Seine-et-Marne, est une zone naturelle protégée qui abrite entre autres de nombreux amphibiens (crapauds, grenouilles, tritons). Les crapauds *Bufo bufo* ont pour habitat la forêt de Fontainebleau la majeure partie de l'année. Une fois par an, au printemps, ces amphibiens migrent vers les plans d'eau pour se reproduire.

Barrière de protection le long d'une route

Pour éviter qu'ils ne se fassent écraser en passant sur la route qui traverse cette zone de migration, un dispositif a été installé : des barrières en bois, suffisamment hautes pour empêcher le saut sur la route, sont placées de chaque côté, obligeant les amphibiens à emprunter des passages souterrains appelés « crapauducs ».

Dans cet exercice, on se propose d'étudier le mouvement lors d'un saut d'un crapaud *Bufo bufo* de façon à déterminer la hauteur minimale des barrières de protection le long d'une route.

Le système considéré est un crapaud dont on étudie le mouvement du centre de masse, noté G. Le champ de pesanteur terrestre local g est considéré comme uniforme et les frottements liés à l'action de l'air sont supposés négligeables face au poids.

Données :

- intensité de la pesanteur terrestre : $g = 9{,}81\ m{\cdot}s^{-2}$;
- taille moyenne d'un crapaud *Bufo bufo* : 10 cm.

Le mouvement du centre de masse G du crapaud est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen et muni du système d'axes (Ox, Oz), respectivement horizontal muni du vecteur unitaire i et vertical muni du vecteur unitaire j voir figure 1).

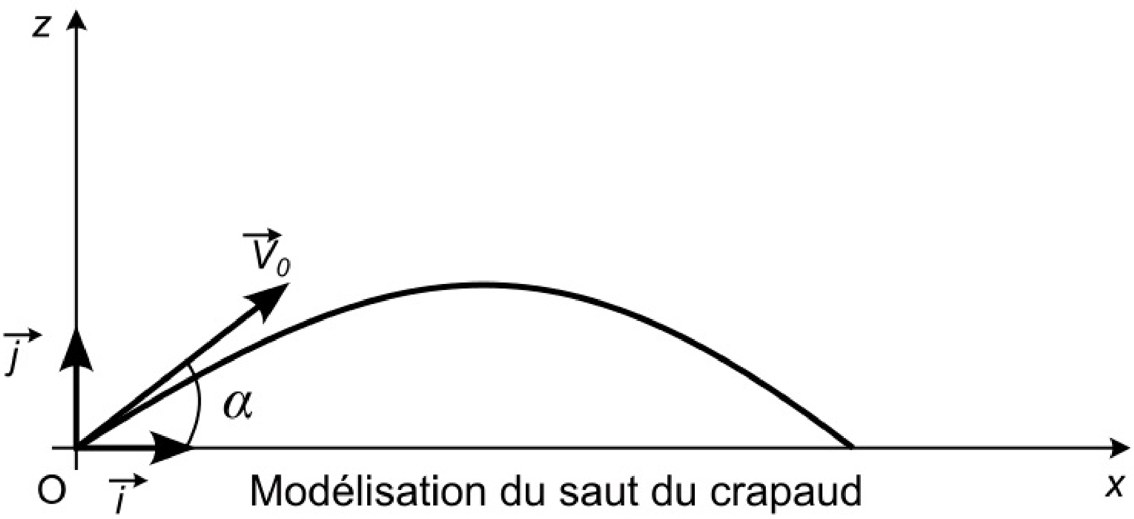

Figure 1. Modélisation du saut du crapaud

À la date $t = 0$ s, le centre de masse G est placé à l'origine du repère O et son vecteur vitesse initiale, noté v_0, a une direction faisant un angle α avec l'axe horizontal (Ox). On note v_0 la norme de v_0.

Q1. Établir les expressions littérales des composantes a_x et a_z du vecteur accélération a_G du centre de masse du crapaud suivant les axes (Ox) et (Oz).

Le crapaud est en chute libre, il n'est donc soumis qu'à son poids qui est une force verticale. Déterminez les composantes du vecteur accélération avec la deuxième loi de Newton.

Q2. Établir les expressions littérales des composantes $v_x(t)$ et $v_z(t)$ du vecteur vitesse v_G du centre de masse du crapaud suivant les axes (Ox) et (Oz).

Déterminez les primitives de chaque composante du vecteur accélération de la question précédente. Attention à tenir compte des composantes de la vitesse initiale du crapaud.

Q3. Montrer que les expressions littérales des équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ de la position du centre de masse G du crapaud au cours de son mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot cos(\alpha) \cdot t \\ z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot sin(\alpha) \cdot t \end{cases}$$

Déterminez les primitives de chaque composante du vecteur position du centre de masse G du crapaud de la question précédente.

Q4. Établir l'expression de la durée du saut du crapaud, notée t_{saut}, en fonction de v_0, g, et α.

Avec une des deux équations horaires, isolez la durée.

Q5. En utilisant l'expression de $x(t)$ et l'expression de t_{saut} obtenue à la réponse à la question Q4, montrer que la vitesse v_0 permettant au crapaud d'effectuer un saut de longueur d est donnée par la relation :

$$v_0 = \sqrt{\frac{g \cdot d}{2(sin\alpha) \cdot (cos\alpha)}}$$

La question fait appel à plusieurs relations trouvées précédemment qu'il faut combiner pour déterminer la vitesse v_0.

Q6. Sachant que les crapauds les plus puissants peuvent faire des sauts d'une longueur égale à 20 fois leur taille, calculer la valeur de v_0 qu'ils atteignent pour un angle $\alpha = 45°$.

Il s'agit ici d'une simple application numérique.

La hauteur maximale z_{max} d'un saut est obtenue lorsque ce saut est vertical ; l'angle α vaut alors $\alpha = 90°$, la vitesse initiale est toujours notée v_0.

Q7. Établir que la hauteur maximale d'un saut a pour expression littérale :

$$z_{max} = \frac{{v_0}^2}{2g}$$

Déterminez dans un premier temps la durée nécessaire à réaliser la hauteur maximale. Ce point correspond au sommet de la parabole.

Q8. En déduire la valeur de la hauteur de barrière minimale, notée $H_{champion}$, qui permet d'arrêter les crapauds les plus puissants, capables de sauter verticalement avec une vitesse initiale v_0 de valeur calculée à la question Q6.

Calculez la hauteur maximale avec la relation précédente. Puis comparez à la hauteur de la barrière.

Q9. Les barrières mesurent en réalité 50 à 60 cm de hauteur. Donner un argument permettant d'expliquer pourquoi on choisit d'installer des barrières d'une hauteur inférieure à $H_{champion}$.

Lors de l'étude du saut du crapaud, on a posé des hypothèses sur le saut. Il est donc nécessaire de vérifier à présent la justesse de ses hypothèses.