À la découverte de Saturne, sujet de métropole, mars 2023, exercice 1

Énoncé

Exercice sur 11 points
La planète Saturne a été observée à travers une lunette astronomique pour la première fois par l'astronome Galilée en 1610. Il a pu entrevoir la planète, mais sa lunette ne lui a pas permis de distinguer clairement ce qui l'entourait (figure 1).
Ce n'est qu'en 1655, grâce à une lunette plus perfectionnée, que Christian Huygens comprend que ce qui entoure Saturne sont des anneaux dont l'aspect varie avec l'angle d'observation. La même année, il découvre également Titan, le plus gros satellite de Saturne (figures 2 et 3).

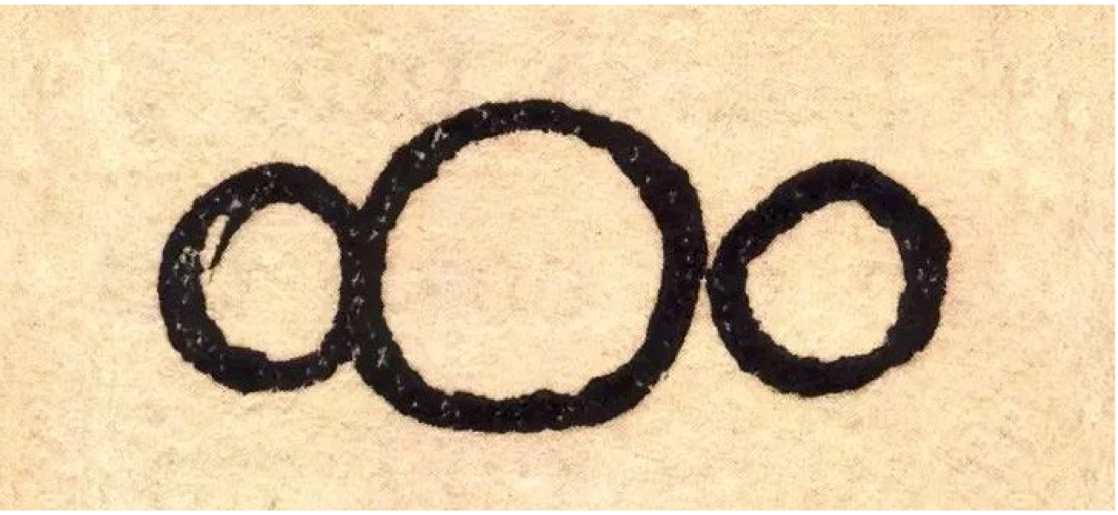


Figure 1. Saturne représentée par Galilée en 1610

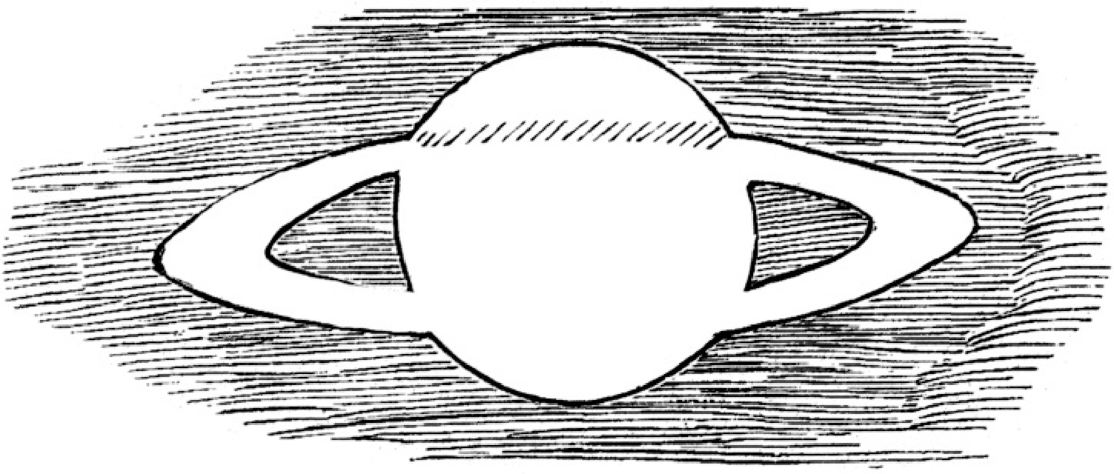


Figure 2. Un des premiers dessins de Saturne réalisé par Huygens en 1655

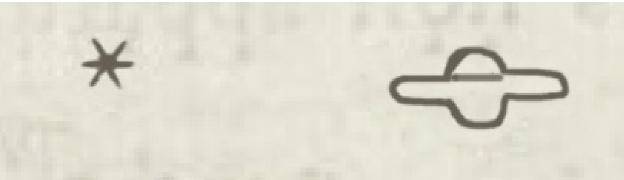


Figure 3. Positions respectives de Saturne et de Titan schématisées par Huygens en 1655

Source : *Systema Saturnium de Huygens*

Le but de cet exercice est d'étudier la lunette astronomique de Huygens afin de comparer ses observations de Saturne et de ses anneaux à celles de Galilée. La fin de l'exercice est consacrée à l'étude du mouvement du satellite Titan à partir des observations de Huygens.

Données :

• caractéristiques des lunettes astronomiques utilisées par Galilée et Huygens :

	Distance focale f'_1 de l'objectif	Distance focale f'_2 de l'oculaire	Diamètre a de l'objectif	Grossissement
Lunette de Galilée utilisée en 1610			29,0 mm	$G_{Gal} = 14$
Lunette de Huygens utilisée en 1655	329 cm	7,0 cm	51,0 mm	

• un observateur peut distinguer deux points différents d'un objet si l'angle sous lequel sont vus ces deux points, depuis le point d'observation, est supérieur ou égal à $3{,}0 \times 10^{-4}$ rad ;

• approximation dans le cas de petits angles ($\theta \ll 1$ rad) : $\tan(\theta) = \theta$;

• constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ;

• masse de Saturne : $M_S = 5{,}68 \times 10^{26}$ kg ;

• masse de Titan : $M_T = 1{,}34 \times 10^{23}$ kg ;

• distance moyenne entre la Terre et Saturne : $D_{T-S} = 1{,}42 \times 10^9$ km ;

• rayon de l'orbite de Titan autour de Saturne : $R = 1{,}22 \times 10^6$ km.

1. Observation de Saturne par Huygens

La lunette de Huygens, considérée comme afocale, est modélisée par un système de deux lentilles minces convergentes notées L_1 et L_2. La lentille L_1 représente l'objectif et la lentille L_2 l'oculaire. Leurs centres optiques respectifs sont notés O_1 et O_2, et leurs distances focales respectives sont notées f'_1 et f'_2.
Sur la figure A1 de l'**annexe à rendre avec la copie**, réalisée sans souci d'échelle, sont représentées les deux lentilles et la position du foyer image F'_1 de la lentille L_1. La lunette est utilisée pour observer un objet AB, supposé « à l'infini », dont l'image par l'objectif sera notée A_1B_1. Deux rayons lumineux issus de B sont représentés sur le schéma.

Q1. Préciser le sens du terme « afocal ».

Le terme « afocal » désigne une particularité des instruments optiques à deux lentilles. Cela permet à l'œil de l'observateur de ne pas accommoder et ainsi diminuer la fatigue visuelle.

Q2. Placer, sur la figure A1 de l'**annexe à rendre avec la copie**, les foyers objet F_2 et image F'_2 de la lentille L_2 dans le cas d'une lunette afocale.

Avec le sens du terme donné au-dessus, on positionne les deux foyers.

Q3. Construire, sur la figure A1 de l'**annexe à rendre avec la copie**, la marche des deux rayons lumineux issus de B qui émergent de la lunette en faisant apparaître l'image intermédiaire A1B1.

Utilisez les rayons particuliers pour faire la construction. On sait que la lunette est afocale, l'image intermédiaire se forme donc sur une position particulière.

La lunette de Huygens est constituée d'un tube long de 372 cm. Comme indiqué sur la figure 4, l'oculaire est placé à une extrémité du tube. L'objectif quant à lui est enfoncé de 36 cm par rapport à l'autre extrémité, afin de le protéger de la buée.

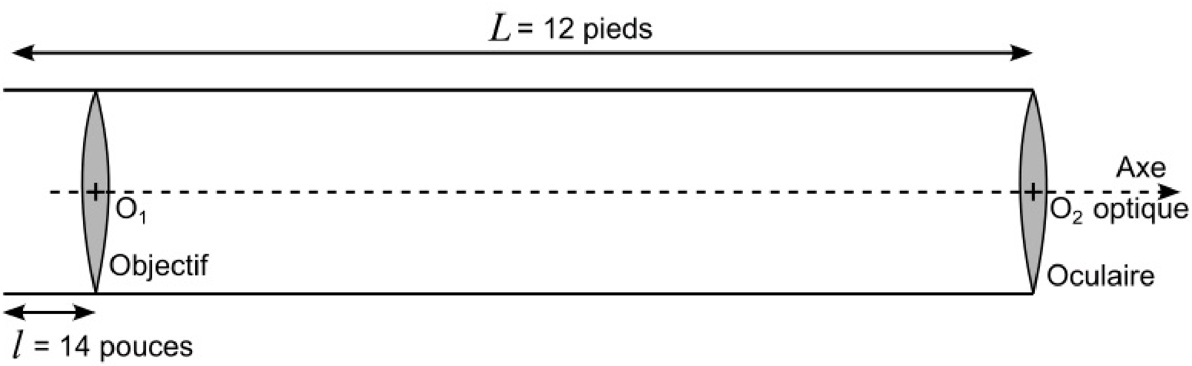


Figure 4. Représentation schématique de la lunette de Huygens (échelle non respectée)

Q4. Vérifier, à partir des données, que la lunette de Huygens peut être considérée comme « afocale ».

Utilisez les différentes mesures données pour les différentes distances focales ainsi que celles données par la figure pour vérifier si le système est « afocal ».

L'angle θ, représenté sur la figure A1 de l'**ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE**, désigne l'angle sous lequel l'espace AB entre la surface de Saturne et son premier anneau est vu à l'œil nu depuis la Terre, lorsque les anneaux de Saturne sont vus de face (voir figure 5).

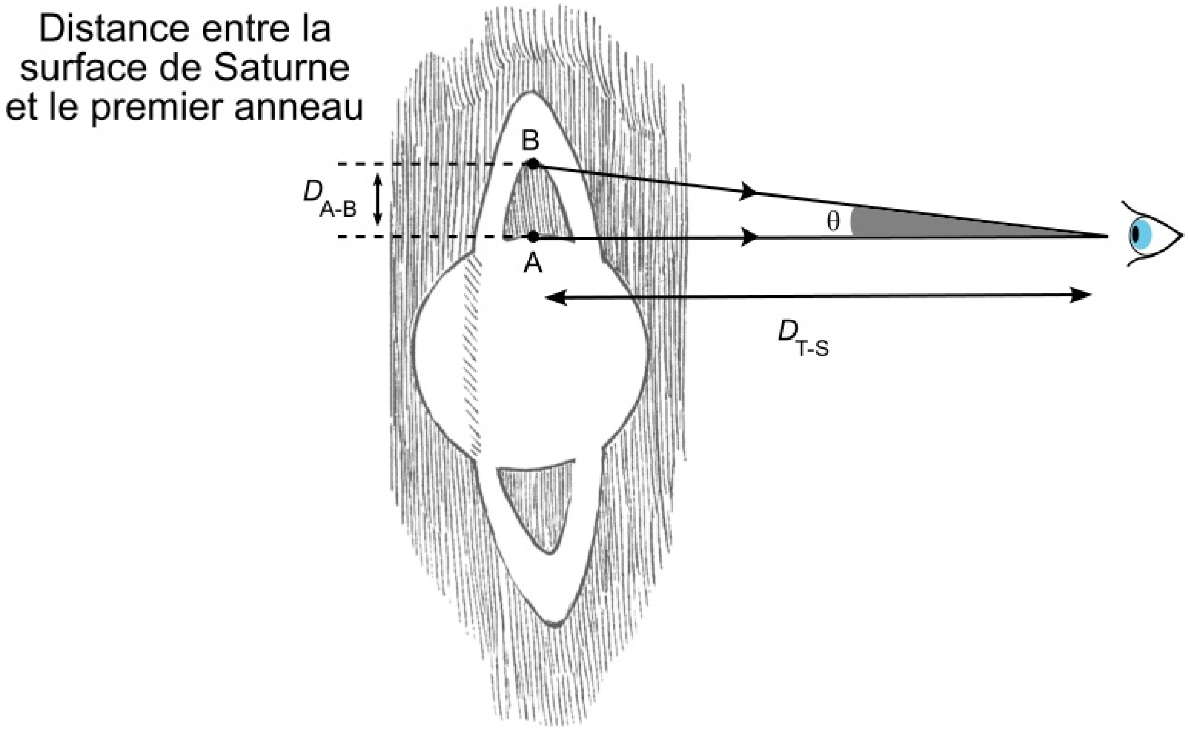


Figure 5. Angle sous lequel Saturne est vue par Huygens sans la lunette (échelle non respectée)

On note θ' l'angle sous lequel un observateur voit l'image $A'B'$ de l'espace AB, à travers la lunette astronomique.

Q5. Placer l'angle θ' sur la figure A1 de l'**ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE**.

Finissez la construction de l'image $A'B'$ afin de pouvoir placer l'angle sous lequel est vue cette image par un observateur.

Q6. Donner l'expression du grossissement G_{Huy} de la lunette de Huygens en fonction des angles θ et θ'.

Donnez la relation du grossissement du cours.

Q7. Montrer que le grossissement G_{Huy} de la lunette de Huygens s'exprime en fonction des distances focales des lentilles L_1 et L_2 constituant la lunette :

$$G_{Huy} = \frac{f_1'}{f_2'}$$

Déterminez les relations donnant les tangentes de chaque angle θ et θ'. Puis la simplification des petits angles permet de remonter à la relation du grossissement.

Q8. Calculer la valeur du grossissement G_{Huy} de la lunette utilisée par Huygens.

Application numérique de la relation précédente.

Q9. Conclure sur la possibilité pour Huygens de distinguer la surface de Saturne de son premier anneau en utilisant la lunette. La distance entre la surface de Saturne et son premier anneau est égale à $D_{A\text{-}B} = 3{,}17 \times 10^4$ km (figure 5).

Déterminez la relation donnant la tangente θ sur la figure, puis simplifiez la relation avec le petit angle. Comparer la valeur trouvée avec l'angle de résolution de l'œil.

2. Prise en compte de la diffraction dans l'observation astronomique

L'observation des détails d'un objet avec une lunette astronomique est principalement limitée par le phénomène de diffraction. En effet, l'image donnée par l'objectif d'une source ponctuelle « à l'infini » n'est pas un point mais une figure de diffraction circulaire, appelée « tache d'Airy », représentée sur la figure 6.

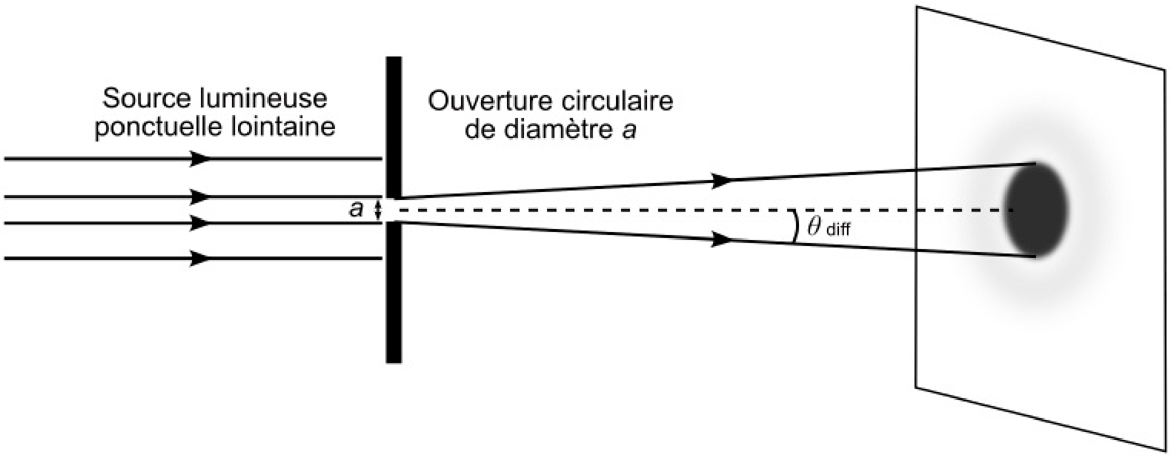


Figure 6. Figure de diffraction obtenue par une ouverture circulaire (échelle non respectée – image en négatif)

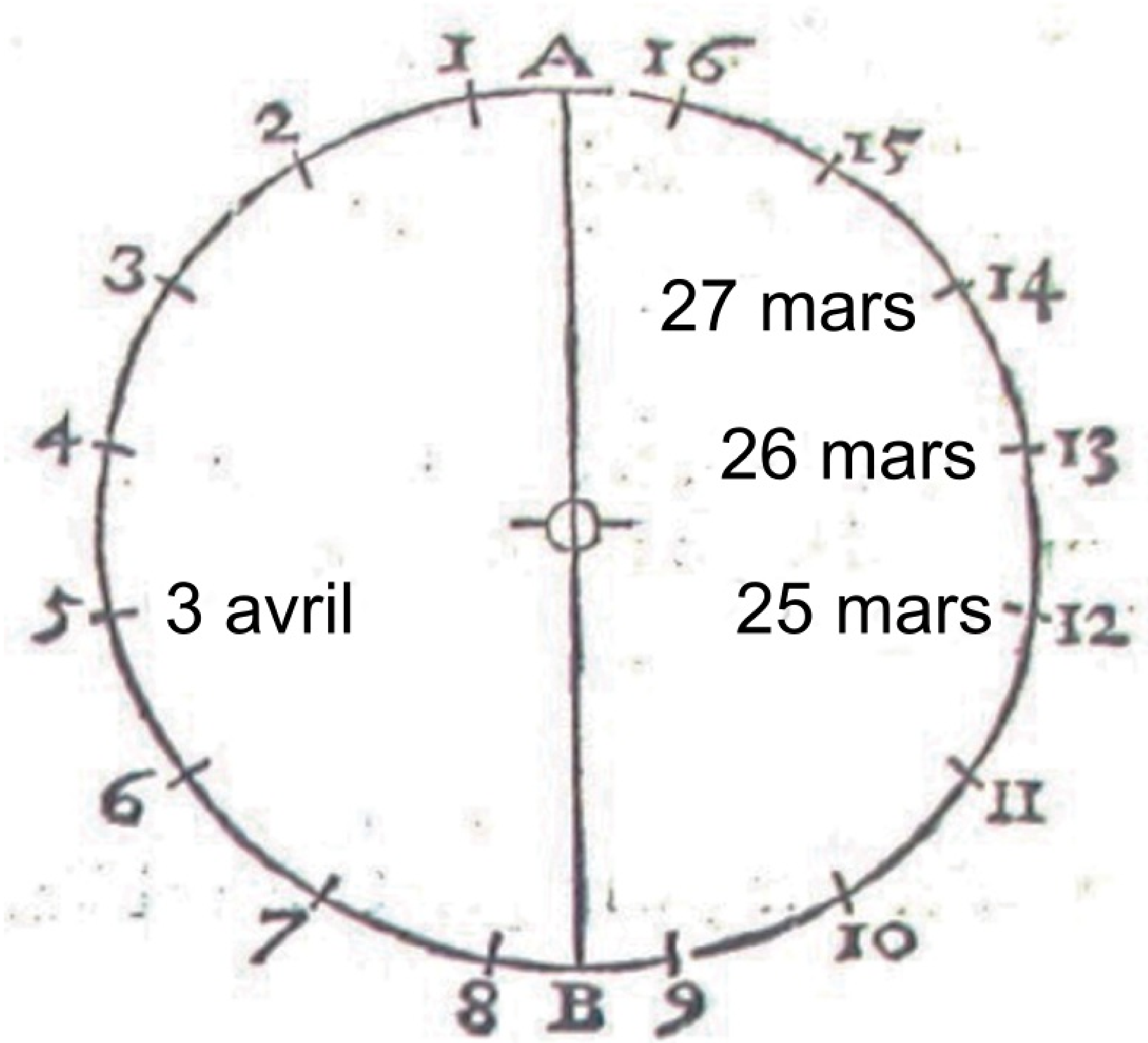
Dans le cas de la lunette astronomique, on admet que l'angle caractéristique de diffraction vérifie la relation :
$\theta_{diff} = 1{,}22 \times \frac{\lambda}{a}$
avec λ la longueur d'onde du faisceau incident et a le diamètre de l'objectif.
Une lunette astronomique ne permet de distinguer deux points A et B que si l'écart angulaire θ entre les directions de ces deux points vus depuis la Terre est supérieur ou égal à l'angle caractéristique de diffraction, c'est-à-dire si la condition $\theta \geqslant \theta_{diff}$ est vérifiée. Si ce n'est pas le cas, les taches d'Airy associées aux deux points se superposent, et les deux points ne peuvent être séparés visuellement.

Q10. Expliquer pourquoi on peut considérer que le phénomène de diffraction a empêché Galilée d'observer les anneaux de Saturne avec sa lunette astronomique contrairement à Huygens qui a pu les observer. Une approche quantitative est attendue.
On rappelle que la distance entre Saturne et la limite du premier anneau visible à l'époque est égale à $D_{A\text{-}B} = 3{,}17 \times 10^4$ km et on effectuera les calculs avec une valeur de la longueur d'onde $\lambda = 550$ nm, pour laquelle l'œil humain est le plus sensible.
Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie, même si elle n'a pas abouti. La démarche est évaluée et doit être correctement présentée.

Calculez le nouvel angle θ_{diff}, en tenant compte de la diffraction, pour Galilée et comparez à l'angle θ.

3. Découverte de Titan par Huygens

Le 25 mars 1655, à 8 heures du soir, employant sa lunette, Huygens aperçoit près de Saturne un point brillant qu'il soupçonne d'être un satellite de cette planète. Plus tard, ce satellite sera appelé Titan.
« Après le 25 mars 1655, à savoir le 10 avril, le satellite a été vu à la même position qu'il occupait à cette première date. De même, le 3 et le 19 avril de cette même année des positions identiques furent observées ; de même encore le 13 et le 29 de ce mois. Tenant donc compte de ces résultats, j'ai dessiné une circonférence de cercle représentant l'orbite du satellite, avec Saturne au centre, et je l'ai divisée en 16 parties, comme le montre la figure suivante. Dans cette orbite j'ai fait circuler le satellite suivant l'ordre naturel des chiffres. [...] Cherchant ensuite sur cette circonférence l'endroit où le satellite s'était trouvé dans notre première observation et corrigeant plusieurs fois cet endroit, [...] il m'a semblé enfin que tout le mouvement peut être représenté le plus commodément, si dans le cas de la première observation, celle du 25 mars 1655, le satellite est placé auprès du nombre 12. Par suite le satellite de Saturne était le 26 mars auprès du nombre 13, le 27 mars auprès du nombre 14, le 3 avril auprès du nombre 5 et ainsi de suite aux endroits de l'orbite qui correspondent assez bien avec les situations observées la première année. »



Source : d'après *Systema Saturnium* de Huygens

Q11. Justifier le choix de Huygens de diviser la trajectoire de Titan en 16 parties.

Le texte explicatif sur les observations de Huygens permet de déterminer la période de révolution de Titan.

Le mouvement de Titan, noté T, est étudié dans le référentiel saturnocentrique, dont l'origine est placée au centre S de Saturne et dont les axes sont dirigés vers des étoiles lointaines. Il est considéré comme galiléen. On travaille dans le repère de Frenet $\left(T, \overrightarrow{u_t}, \overrightarrow{u_n}\right)$.
Dans *Systema Saturnium*, Huygens précise que la valeur de la période de révolution T_{Huy} de Titan est de « 15 jours 23 heures 13 minutes ».

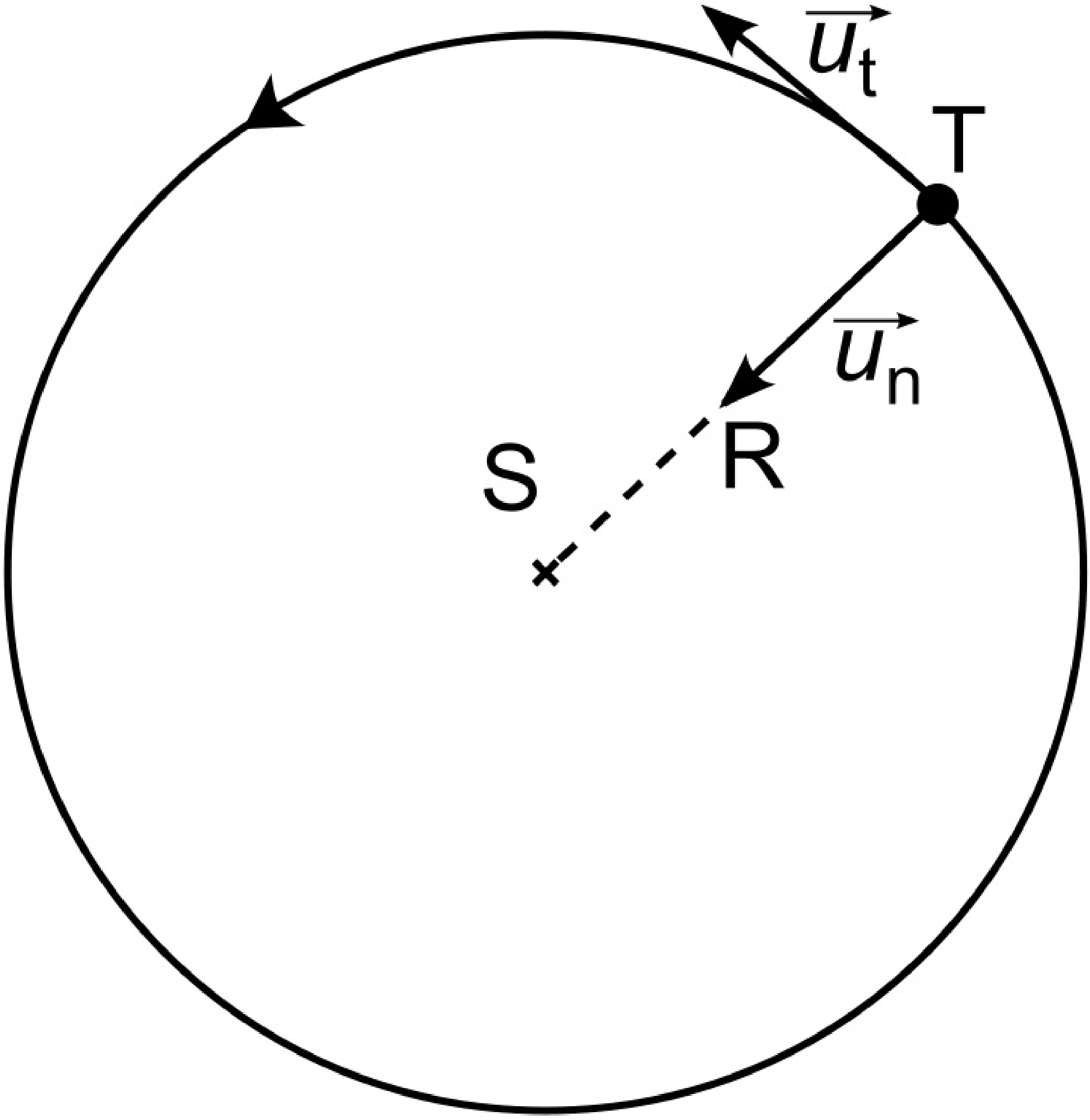


Figure 7. Schéma de la trajectoire de Titan dans le référentiel saturnocentrique

Q12. Donner l'expression vectorielle de la force d'interaction gravitationnelle exercée par Saturne sur le satellite Titan en fonction de G, Ms, M_T, R et de l'un des vecteurs unitaires.

La force d'interaction gravitationnelle s'exerce toujours entre deux masses. Elle est toujours attractive.

Q13. Le mouvement de Titan autour de S est supposé circulaire. Montrer qu'il est uniforme puis que l'expression de la vitesse du satellite s'écrit sous la forme :

$v = \sqrt{\frac{G \cdot Ms}{R}}$

Utilisez la deuxième loi de Newton sur le système, puis le repère de Frenet donné.

Q14. En déduire l'expression de la période de révolution notée T_{Kep} de Titan. Calculer sa valeur. Commenter.

La vitesse est constante, donc on peut déterminer une relation pour une révolution. Utilisez ensuite la relation précédente et comparez aux données.

Annexe

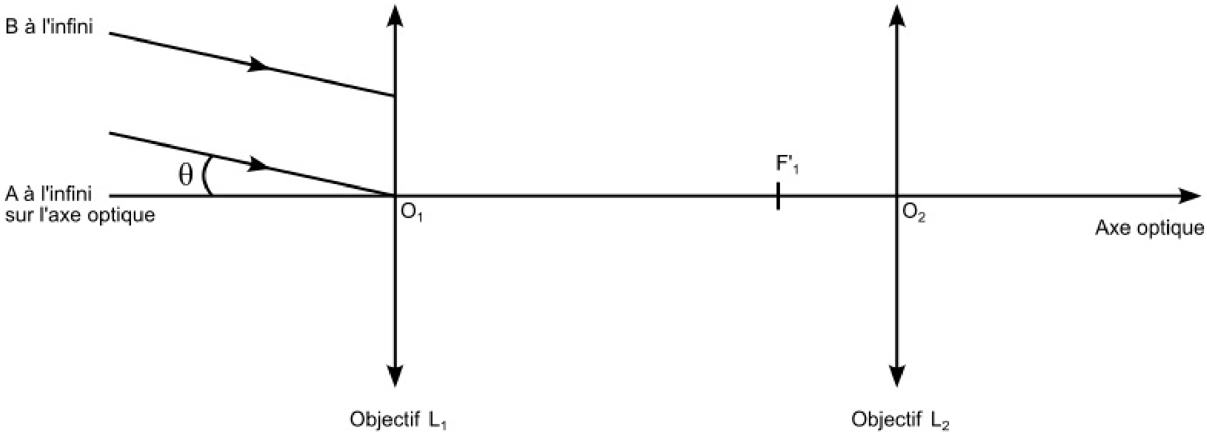


Figure A1. Schéma de la lunette de Huygens (échelle non respectée)