

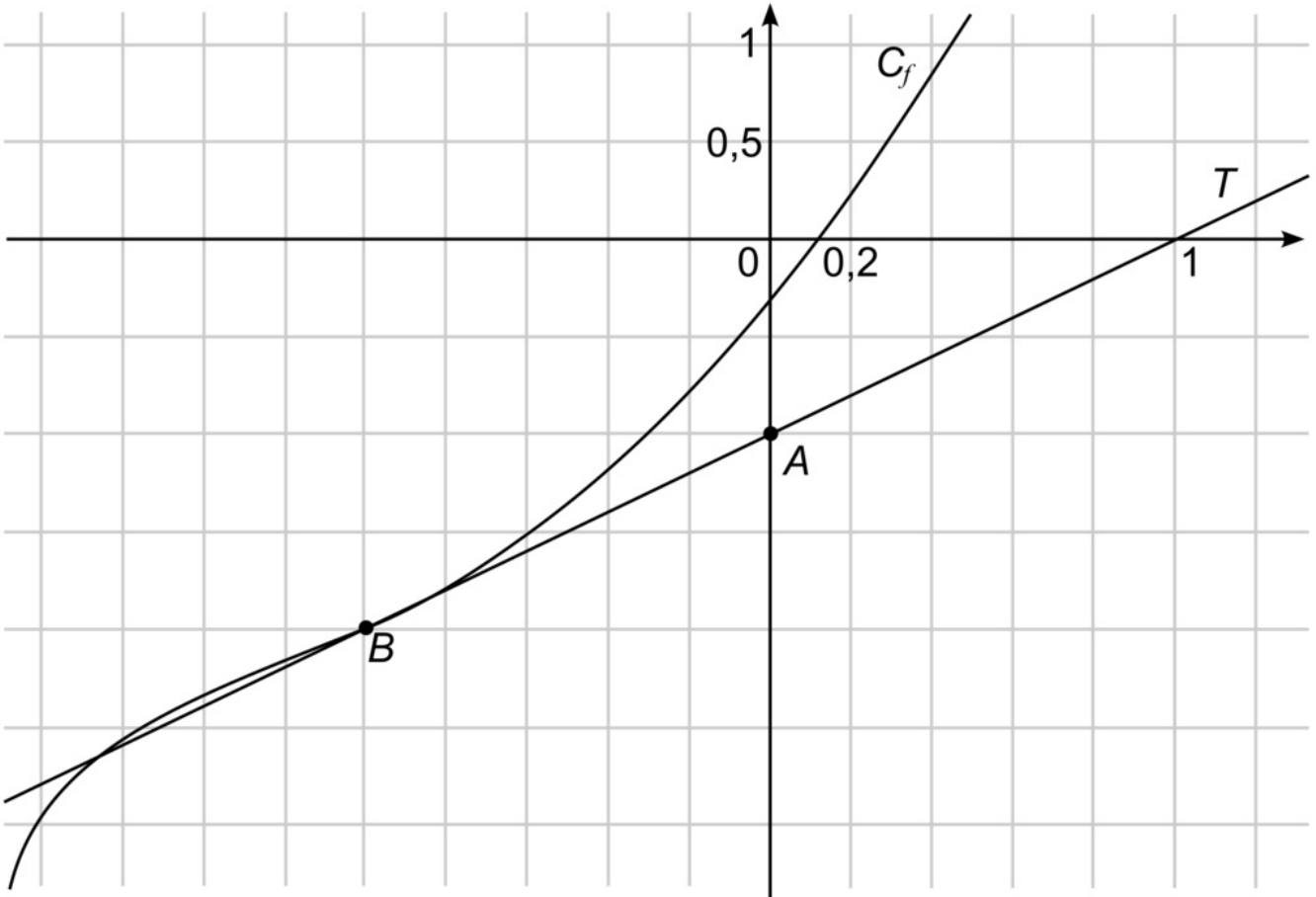
Énoncé

Exercice sur 6 points

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2; +\infty[$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On a tracé ci-dessous la courbe C_f et sa tangente T au point B d'abscisse -1 .

On précise que la droite T passe par le point $A(0; -1)$.



Partie A : exploitation du graphique.

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La courbe C_f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f

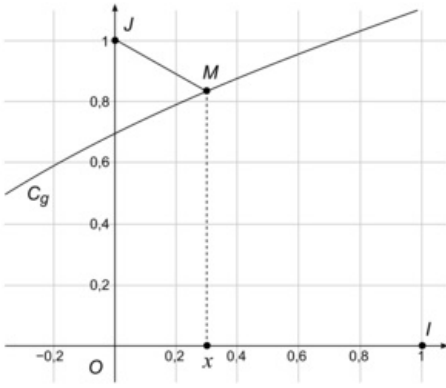
On considère que la fonction f est définie sur $]-2; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2)$, où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2 . Interpréter graphiquement ce résultat. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2; +\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2; +\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.
5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2; +\infty[$.
6. Montrer que C_f admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale.

Soit g la fonction définie sur $]-2; +\infty[$ par $g(x) = \ln(x + 2)$.

On note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, représenté ci-dessous.



Soit M un point de C_g d'abscisse x .

Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.

On considère la fonction b définie sur $]-2; +\infty[$ par $b(x) = JM^2$.

1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $b(x) = x^2 + [\ln(x + 2) - 1]^2$.

2.

On admet que la fonction b est dérivable sur $]-2; +\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée. On admet également que pour tout réel $x > -2$, $h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$ où f est la fonction étudiée en partie B.

a. Dresser le tableau de variations de b sur $]-2; +\infty[$.

Les limites ne sont pas demandées.

b. En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question 4 de la partie B.

3.

On notera M_α le point de C_g d'abscisse α .

a. Montrer que $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^{-2}$

b. En déduire que la tangente à C_g au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires. On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1