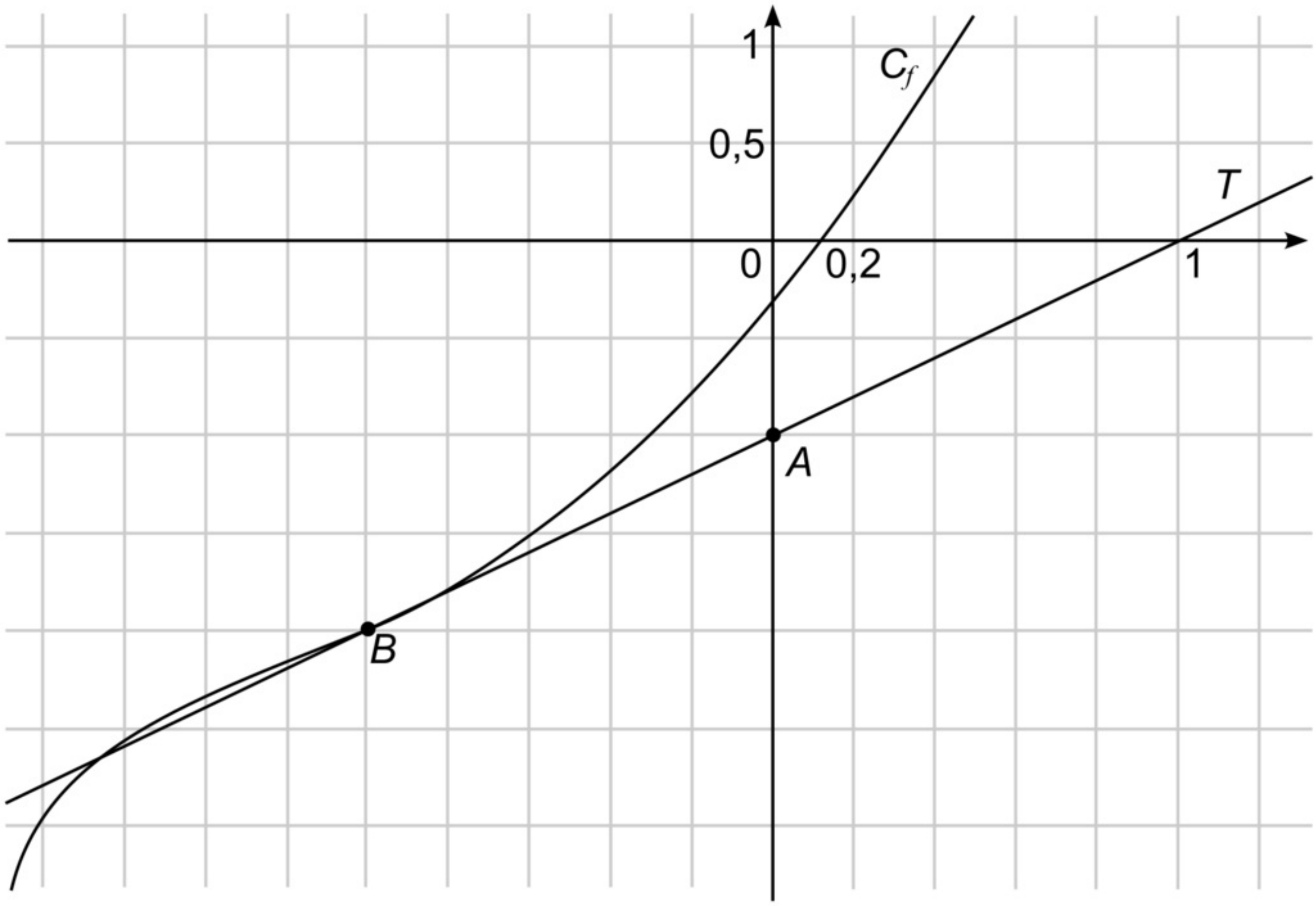
Sujet de métropole, juin 2024, exercice 3

Énoncé

Exercice sur 6 points

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' se dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On a tracé ci-dessous la courbe C_f et sa tangente T au point B d'abscisse -1.
On précise que la droite T passe par le point $A(0\,;\,-1)$.



Partie A : exploitation du graphique.

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.

2. La courbe C_f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.

3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2. Interpréter graphiquement ce résultat. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Montrer que pour tout $x > -2$, $f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\,;+\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.

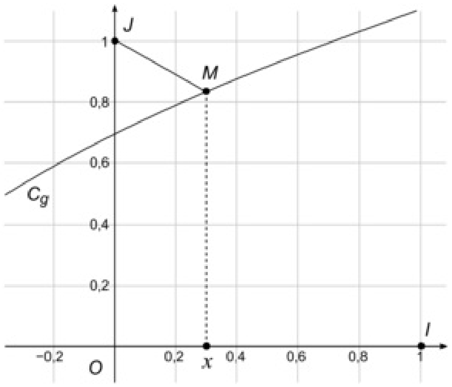
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2\,;+\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.

5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\,;+\infty[$.

6. Montrer que C_f admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale.

Soit g la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x+2)$.
On note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, représenté ci-dessous.



Soit M un point de C_g d'abscisse x.
Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.
On considère la fonction h définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $h(x) = JM^2$.

1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.

2.
On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\,;+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée. On admet également que pour tout réel $x > -2$, $h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$ où f est la fonction étudiée en partie B.

a. Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\,;+\infty[$.
Les limites ne sont pas demandées.

b. En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question 4 de la partie B.

3.
On notera M_α le point de C_g d'abscisse α.

a. Montrer que $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^{-2}$

b. En déduire que la tangente à C_g au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires. On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1