Sujet de métropole, juin 2024, exercice 2

Énoncé

Exercice sur 5 points
Les parties A et B sont indépendantes.

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que 1 m^3 = 1 000 L.
Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.
Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en $mg.L^{-1}$, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et 3 $mg.L^{-1}$.
Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.
Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à 0,01 $mg.L^{-1}$. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de 0,70 $mg.L^{-1}$.

Partie A : étude d'un modèle discret.

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de 0,3 $mg.L^{-1}$.

2. Pour tout entier naturel n, on note v_n le taux de chlore en $mg.L^{-1}$, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0{,}7$.
On admet que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}92 v_n + 0{,}3$.

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, v_n
$\leqslant$
v_{n+1}
$\leqslant$
4.

b. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.

4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-dessous écrit en langage Python pour que la fonction alerte_chlore renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

```
def alerte_chlore(s):
    n = 0
    v= 0.7
    while .......... :
        n = ..........
        v = ..........
    return n
```

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction alerte_chlore(3) ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : étude d'un modèle continu.

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.
Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore en $mg.L^{-1}$, dans la

piscine.
On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,08\,y + \frac{q}{20}$ où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4}$ où C est une constante réelle.

2. a. Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.

b. On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à 0,7 mg.L^{-1}. On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de 2 mg.L^{-1}. Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.