Sujet de métropole, mai 2022, sujet 2, exercice 4

Énoncé

Exercice sur 7 points

Partie A : Études des deux fonctions

On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :
$f(x) = 0{,}06(-x^2 + 13{,}7x)$ et $g(x) = (-0{,}15x + 2{,}2)\,\mathrm{e}^{0{,}2x} - 2{,}2$.
On admet que les fonctions f et g sont dérivables et on note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

1. On donne le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

x	0		$6{,}85$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(6{,}85)$	$\searrow$	$-\infty$

1. a. Justifier la limite de f en $+\infty$.

Pour trouver la limite de cette fonction, il faut utiliser la technique usuelle de factorisation par le terme de plus haut degré, sinon c'est une FI.

1. b. Justifier les variations de la fonction f.

C'est une question très classique lors de l'étude d'une fonction. Il faut penser à bien détailler les différentes étapes de la démarche : dérivation de la fonction, puis résolution des inéquations qui permettent d'obtenir le signe de la dérivée et enfin construction du tableau de variations. Il faut également penser à justifier les valeurs remarquables données dans ce tableau.

1. c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Il faut utiliser les méthodes de factorisation et de résolution d'équation produit nul vues au collège pour résoudre cette question rapidement.

2. a. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Pour trouver la limite de cette fonction, il faut utiliser les règles usuelles de limite d'une fonction composée, d'une somme et d'un produit.

2. b. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0 ; +\infty[$, on a : $g'(x) = (-0{,}03x + 0{,}29)\,\mathrm{e}^{0{,}2x}$.

Cette question nécessite l'utilisation de la formule de la dérivée d'un produit et de la dérivée d'une fonction composée. Ce sont des calculs usuels dont il faut détailler chaque étape pour avoir tous les points.

2. c. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[0 ; +\infty[$. Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g.

C'est une question très classique lors de l'étude d'une fonction. Il faut penser à bien détailler les différentes étapes de la démarche : dérivation de la fonction, puis résolution des inéquations qui permettent d'obtenir le signe de la dérivée et enfin construction du tableau de variations.
Il faut également penser à justifier les valeurs remarquables données dans ce tableau.

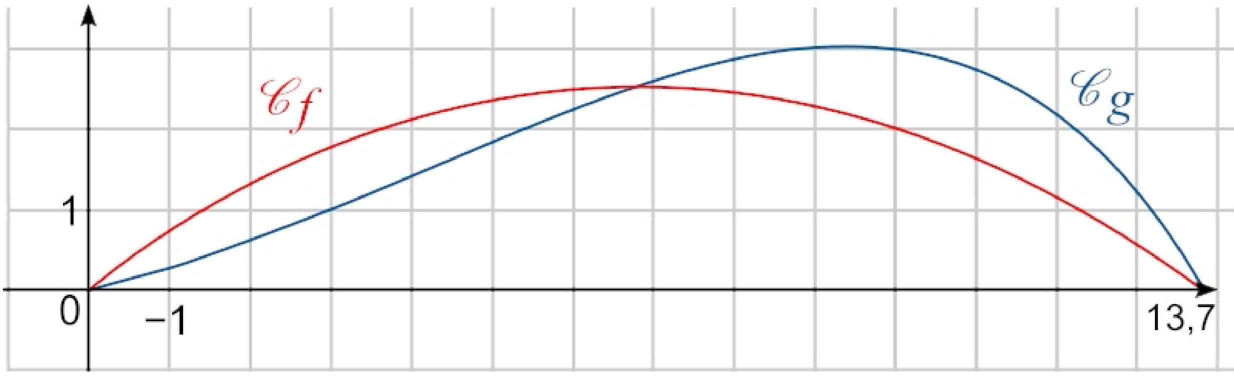
2. d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle et déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de cette solution.

Cette question nécessite l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires. C'est une question très classique et qui est toujours formulée de la même manière lors des études de fonction, il faut donc la reconnaître pour directement se lancer dans le TVI.

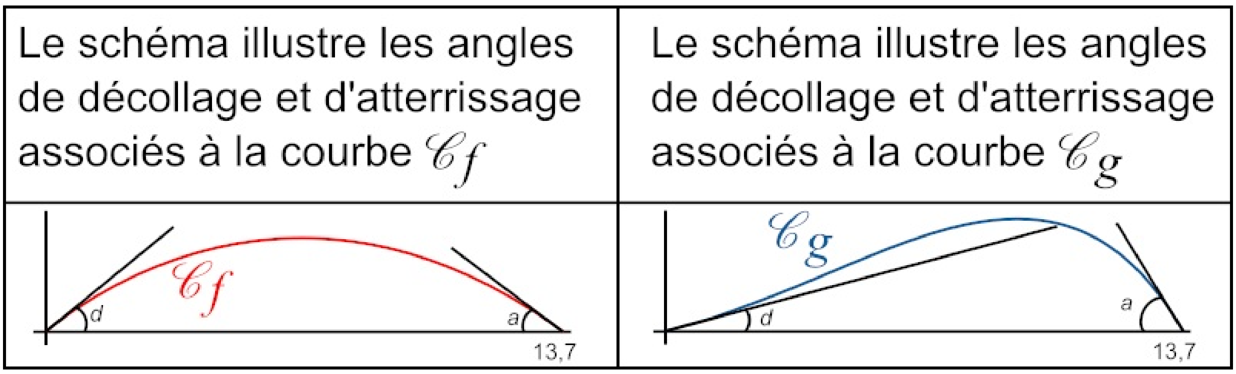
Partie B : Trajectoires d'une balle de golf

Pour frapper la balle, un joueur de golf utilise un instrument appelé « club » de golf.
On souhaite exploiter les fonctions f et g étudiées en partie A pour modéliser de deux façons différentes la trajectoire d'une balle de golf. On suppose que le terrain est parfaitement plat.
On admettra ici que 13,7 est la valeur qui annule la fonction f et une approximation de la valeur qui annule la fonction g.

On donne ci-dessous les représentations graphiques de f et g sur l'intervalle [0 ; 13,7].



Pour x représentant la distance horizontale parcourue par la balle en dizaines de yards après la frappe (avec $0 < x < 13{,}7$), $f(x)$ (ou $g(x)$ selon le modèle) représente la hauteur correspondante de la balle par rapport au sol, en dizaines de yards (1 yard correspond à environ 0,914 mètre).
On appelle « angle de décollage » de la balle l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe (C_f ou C_g selon le modèle) en son point d'abscisse 0. Une mesure de l'angle de décollage de la balle est un nombre réel d tel que $\tan(d)$ est égal au coefficient directeur de cette tangente.
De même, on appelle « angle d'atterrissage » de la balle l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe (C_f ou C_g selon le modèle) en son point d'abscisse 13,7. Une mesure de l'angle d'atterrissage de la balle est un nombre réel a tel que $\tan(a)$ est égal à l'opposé du coefficient directeur de cette tangente. Tous les angles sont mesurés en degrés.



1. *Première modélisation* : on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $f(x)$ la hauteur correspondante de la balle. Selon ce modèle :

1. a. Quelle est la hauteur maximale, en yards, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?

Ici, l'exercice utilise la fonction étudiée en partie A. Il faut donc retrouver la valeur intéressante de cette fonction qui permet de rapidement effectuer le bon calcul pour répondre à cette question.

1. b. Vérifier que $f'(0) = 0{,}822$.

Il faut utiliser l'expression de la dérivée de la fonction f déjà étudiée en partie A.

1. c. Donner une mesure en degrés de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième. (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).

Il faut connaître le lien entre fonction dérivée et coefficient directeur de la tangente à la courbe. Et bien observer que l'angle cherché est relié à cette tangente.

1. d. Quelle propriété graphique de la courbe C_f permet de justifier que les angles de décollage et d'atterrissage de la balle sont égaux ?

Il faut maîtriser le vocabulaire des courbes représentatives et connaître les propriétés des paraboles représentant une fonction du second degré (vues en première) pour répondre.

2. *Seconde modélisation* : on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $g(x)$ la hauteur correspondante de la balle. Selon ce modèle :

2. a. Quelle est la hauteur maximale, en yards, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ? On précise que $g'(0) = 0{,}29$ et $g'(13{,}7) \approx -1{,}87$.

Il faut utiliser l'expression de la dérivée de la fonction g déjà étudiée en partie A.

2. b. Donner une mesure en degrés de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième. (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).

Comme pour la fonction précédente, il faut connaître le lien entre fonction dérivée et coefficient directeur de la tangente à la courbe.

2\. c. Justifier que 62 est une valeur approchée, arrondie à l'unité près, d'une mesure en degrés de l'angle d'atterrissage de la balle.

Comme pour la question précédente, il faut connaître le lien entre fonction dérivée et coefficient directeur de la tangente à la courbe, mais au moment de l'atterrissage, et utiliser les valeurs intéressantes de la fonction g dans toutes les questions précédentes.

Tableau : extrait d'une feuille de calcul donnant une mesure en degrés d'un angle quand on connaît sa tangente :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	tan(θ)	0,815	0,816	0,817	0,818	0,819	0,82	0,821	0,822	0,823	0,824	0,825	0,826
2	θ en degrés	39,18	39,21	39,25	39,28	39,32	39,35	39,39	39,42	39,45	39,49	39,52	39,56
3													
4	tan(θ)	0,285	0,286	0,287	0,288	0,289	0,29	0,291	0,292	0,293	0,294	0,295	0,296
5	θ en degrés	15,91	15,96	16,01	16,07	16,12	16,17	16,23	16,28	16,33	16,38	16,44	16,49

Partie C : Interrogation des modèles

À partir d'un grand nombre d'observations des performances de joueurs professionnels, on a obtenu les résultats moyens suivants :

Angle de décollage en degrés	Hauteur maximale en yards	Angle d'atterrissage en degrés	Distance horizontale en yards au point de chute
24	32	52	137

Quel modèle, parmi les deux étudiés précédemment, semble le plus adapté pour décrire la frappe de la balle par un joueur professionnel ? La réponse sera justifiée.

Il faut comparer chaque critère de ce tableau aux valeurs obtenues avec les deux modèles représentés par les fonctions f et g. Il faut ici faire attention à la rédaction de chaque vérification pour conclure sans omettre aucune justification.