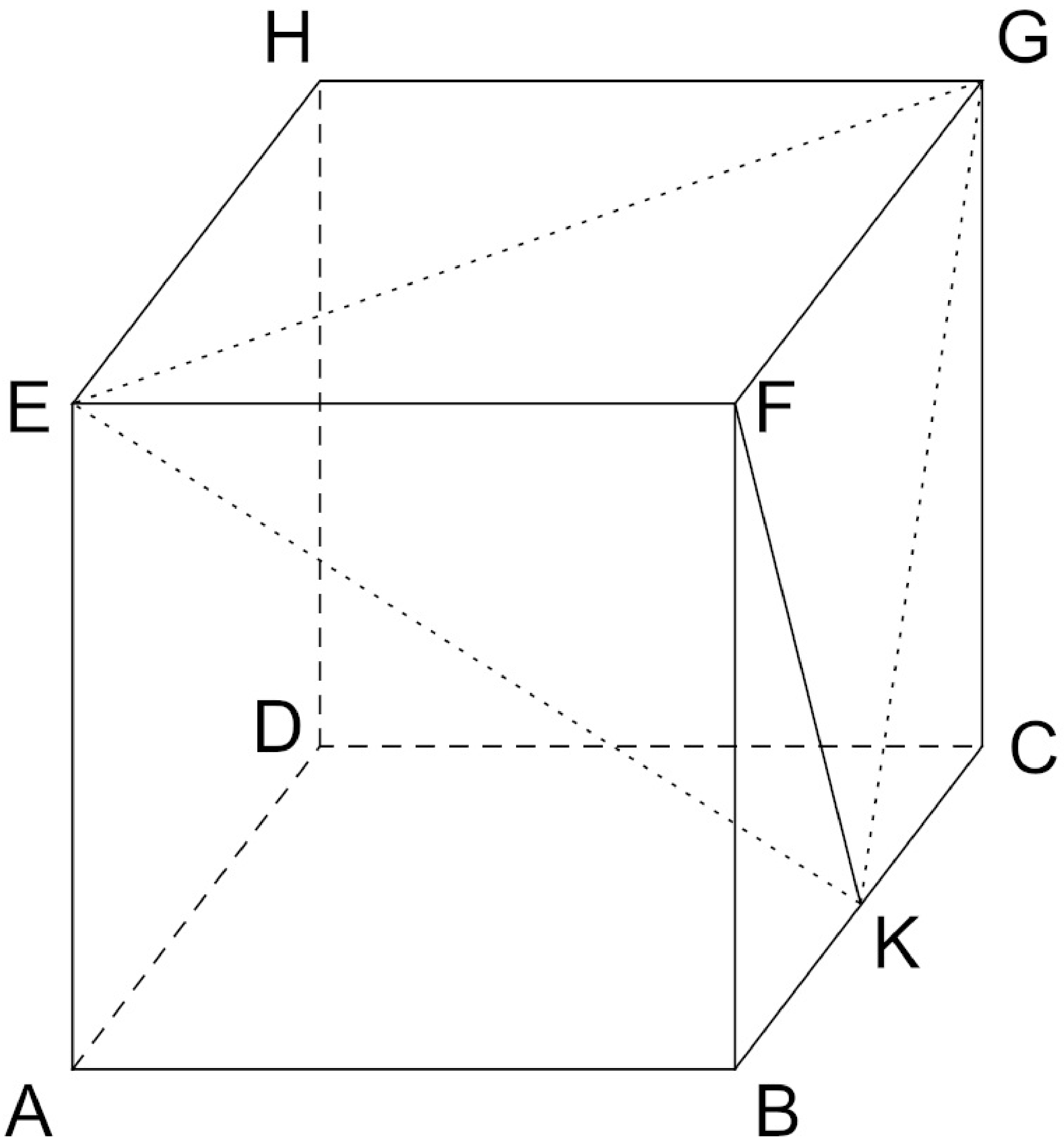
Énoncé

Exercice sur 7 points

On considère un cube ABCDEFGH et on appelle K le milieu du segment $[BC]$.



On se place dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et on considère le tétraèdre EFGK.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :
$V = \frac{1}{3} \times B \times h$
où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

1. Préciser les coordonnées des points E, F, G et K.

C'est la première question de l'exercice et c'est une question de cours. On cherche à voir si l'élève connaît le lien entre un repère de l'espace et les coordonnées de certains points. Il n'y a pas vraiment de justification attendue à cette question.

2. Montrer que le vecteur $n\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK).

Il faut utiliser le lien entre orthogonalité et produit scalaire pour répondre à cette question, en étant vigilant, car on veut montrer l'orthogonalité à un plan (qui est défini par 2 vecteurs).

3. Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne : $2x - 2y + z - 1 = 0$.

C'est une question « classique » dans les exercices de géométrie dans l'espace. Il faut la réaliser étape par étape et bien utiliser les formules du cours et les coordonnées des points et des vecteurs obtenues aux questions 1 et 2.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EGK) passant par F.

C'est une question « classique » dans les exercices de géométrie dans l'espace. On cherche à voir si l'élève connaît le lien entre représentation paramétrique et vecteur directeur d'une droite.

5. Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{7}{9}\right)$.

Cette question traite de projection orthogonale, mais ce n'est pas dans cette direction qu'il faut aller, car cela compliquerait le travail. Il faut utiliser le fait que le point H est le point d'intersection de deux objets de l'espace et ainsi résoudre le système paramétrique associé à cette notion d'intersection.

6. Justifier que la longueur LF est égale à $\frac{2}{3}$.

À nouveau, c'est une question « classique » de calcul d'une longueur dans un exercice de géométrie dans l'espace. Il faut donc connaître la formule permettant de calculer la longueur et voir qu'elle nécessite la connaissance des coordonnées du vecteur associé. C'est la première étape de la résolution de cette question.

7. Calculer l'aire du triangle EFG. En déduire que le volume du tétraèdre EFGK est égal à $\frac{1}{6}$.

Il faut utiliser ici les formules usuelles de calculs d'aires et de volumes apprises depuis le collège. Il faut penser à bien détailler les calculs et utiliser les valeurs obtenues précédemment dans l'exercice.

8. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.

Il faut penser à bien détailler les calculs et utiliser les valeurs obtenues précédemment dans l'exercice. Il faut pour cela utiliser toutes les formules du cours à sa disposition et ne pas hésiter à isoler les valeurs inconnues dans les équations.

9. On considère les points P milieu du segment $[EG]$, M milieu du segment $[EK]$ et N milieu du segment $[GK]$. Déterminer le volume du tétraèdre FPMN.

C'est la dernière question du problème. Il faut donc utiliser toutes les questions précédentes pour réaliser cette question. Il manque tout de même quelques valeurs numériques pour conclure, mais elles sont rapides à obtenir. Il ne faut pas hésiter à commencer cette question et avancer au maximum, car chaque étape sera valorisée dans la notation.
