Énoncé

Partie 1. Application directe

Le nombre de pièces sortant d'une usine en une journée est une variable aléatoire d'espérance $m = 50$ et de variance $\sigma^2 = 25$. On veut estimer la probabilité que la production, un jour donné, dépasse 75 pièces.

Partie 2. Intervalle de confiance obtenu avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Un institut de sondages décide de mener une enquête concernant une élection pour laquelle deux candidats A et B se présentent. On suppose, pour simplifier les choses, que chaque individu sondé répond A ou B, à l'exclusion de toute autre réponse, et que le collège électoral est suffisamment grand pour que les réponses soient considérées comme mutuellement indépendantes. La taille de l'échantillon choisi pour faire le sondage est $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour chaque individu i de l'échantillon, on appelle X_i la variable aléatoire égale à 1 si la réponse est favorable à A, et 0 sinon. Chaque variable X_i est une variable de Bernoulli de paramètre p inconnu que le sondage souhaite bien sûr estimer. Les variables sont indépendantes. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\overline{X_n} = \frac{S_n}{n}$.

1. Quelle est la loi suivie par S_n ? Que représente $\overline{X_n}$? Calculer $E\left(\overline{X_n}\right)$ et $V\left(\overline{X_n}\right)$.

2. Montrer que quel que soit $x \in]0\,;\,1[$,
$0 < x(1 - x) \leqslant \frac{1}{4}$

.

3. Déduire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que quel que soit $t > 0$,
$P\left(p \in \left[\overline{X_n} - t\,;\overline{X_n} + t\right]\right) \geqslant 1 - \frac{1}{4nt^2}$

.

4.
Soit $t = \frac{1}{2\sqrt{0{,}05n}} > 0$, on a donc :
$P\left(p \in \left[\overline{X_n} - \frac{1}{2\sqrt{0{,}05n}}\,;\,\overline{X_n} + \frac{1}{2\sqrt{0{,}05n}}\right]\right) \geqslant 0{,}95$

.

On dit que $\left[\overline{X_n} - \frac{1}{2\sqrt{0{,}05n}}\,;\,\overline{X_n} + \frac{1}{2\sqrt{0{,}05n}}\right]$ est un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %. Un intervalle de confiance est donc un intervalle aléatoire. Dès que la variable aléatoire $\overline{X_n}$ est réalisée et donne la valeur f, l'intervalle $\left[f - \frac{1}{2\sqrt{0{,}05n}}\,;\,f + \frac{1}{2\sqrt{0{,}05n}}\right]$ qui n'est plus aléatoire est appelé une estimation de p par un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %.

a. On suppose que $n = 1000$ et que les questionnaires indiquent que 520 personnes sont favorables à A. Donner une estimation de p par un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %.

b. Combien faut-il choisir de sondés pour que p soit estimé par un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % d'amplitude inférieure à 1 % ?

La bonne méthode

Partie 1

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Partie 2

1. La variable S_n est la somme de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre. On utilise les propriétés de l'espérance et de la variance.

2. Une simple étude de fonction permet de conclure.

3. On écrit l'inégalité demandée et on utilise ce qui précède.

4.
a. Il s'agit d'une simple application numérique.

b. Il s'agit d'une simple inéquation à résoudre.