Énoncé

Partie 1

Un point lumineux se déplace sur une droite à partir de l'origine. À chaque seconde, il se déplace d'une unité vers la droite avec la probabilité p, ou vers la gauche avec la probabilité $1 - p$, les déplacements étant supposés indépendants. On note X son abscisse après n secondes. Quelle est la loi de X et son espérance ?

Il pourra être utile d'introduire la suite de variables aléatoires
$(X_i)_{1 \leqslant 1 \leqslant n}$
, où X_i est la variable aléatoire qui vaut 1 si le i-ème déplacement s'effectue vers la droite, et -1 si ce déplacement s'effectue vers la gauche, et de considérer Y_i la variable aléatoire définie par $Y_i = \frac{X_i + 1}{2}$.

Partie 2

Soit n un entier naturel non nul. Soit
$(X_i)_{1 \leqslant 1 \leqslant n}$
, une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in]0\,;\,1[$. On note $\alpha = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

1. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \left(p_i - \frac{\alpha}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 - \frac{\alpha^2}{n}$.

2. Calculer $v = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$.

3. Déterminer les valeurs de p_i maximisant v.

La bonne méthode

Partie 1

On utilise l'indication de l'énoncé et on se ramène à une situation binomiale pour faciliter les calculs.

Partie 2

1. Il suffit de développer l'expression de gauche pour obtenir celle de droite.

2. On n'oublie pas que les variables sont indépendantes et qu'elles suivent toutes une loi de Bernoulli.

3. Il suffit de mettre en relation les deux premières questions.