Primitives. D'après sujet Bac S, Centres Étrangers, juin 2000

Énoncé

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln(\mathrm{e}^{2x}-1)$. On cherche l'ensemble des primitives de f sur $]0\,;\,+\infty[$. On peut utiliser l'intégration par parties. L'énoncé propose une autre méthode qui, en fait, n'est différente qu'en apparence.

1. Démontrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + y = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1}$.

2. Démontrer que quel que soit $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1} - \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.

3. Déduire des questions précédentes l'ensemble des primitives de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

La bonne méthode

1. Il s'agit de démontrer que quel que soit $x > 0$, $f'(x) + f(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1}$.

2. Le plus simple est de montrer que l'expression de droite est égale à l'expression de gauche. On peut également effectuer la différence des deux expressions et montrer que celle-ci est nulle.

3. Toute primitive de la dérivée d'une fonction est... Par ailleurs, une primitive d'une fonction s'écrivant sous la forme $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u|$.