

## Énoncé

### I. Restitution organisée des connaissances

Prérequis : On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

1. Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

2. En déduire que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ .

### II. Étude d'une fonction $f$

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$ .

On note  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Soit  $u$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $u(x) = x^3 - 1 + 2 \ln x$ .

a. Étudier le sens de variation de la fonction  $u$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

b. Calculer  $u(1)$  et en déduire le signe de  $u(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

2. Étude de la fonction  $f$ .

a. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

b. Déterminer la fonction dérivée de  $f$ .

3. Éléments graphiques.

a. Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à la courbe  $C$ .

b. Déterminer la position de  $C$  par rapport à la droite  $(\Delta)$ .

### La bonne méthode

Partie I. 1. Privilégier la composition des limites.

Partie I. 2. Faire apparaître des limites connues sans faire apparaître une forme indéterminée.

Partie II. 1. a. On dérive la fonction et on examine le signe de ce que l'on vient d'obtenir avant toute manipulation algébrique.

Partie II. 1. b. On utilise la stricte monotonie de la fonction.

Partie II. 2. a. Lorsque l'on cherche des limites, on commence par regarder si les théorèmes généraux sur les opérations répondent. Si ce n'est pas le cas, si la forme est indéterminée, on transforme les écritures pour lever les indéterminations, en particulier en invoquant les croissances comparées des fonctions en jeu.

Partie II. 2. b. On dérive la fonction et on relit la partie II. 1.

Partie II. 3. a. En général, pour montrer que la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à une courbe, on effectue la différence  $f(x) - (ax + b)$  et on montre que cette différence tend vers 0.

Partie II. 3. b. On étudie le signe de l'expression  $f(x) - (ax + b)$ .