

## Énoncé

On considère la fonction  $f$  définie sur

$\mathbb{R}$   
par  $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$ .

Soit  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ , avec pour unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

### PARTIE A

Soit  $g$  la fonction définie sur

$\mathbb{R}$   
par  $g(x) = e^x - x - 1$ .

1. Étudier les variations de la fonction  $g$  sur

$\mathbb{R}$ .  
En déduire le signe de la fonction  $g$ .

2. Justifier que, pour tout réel  $x$ ,  $e^x - x$  est strictement positif.

### PARTIE B

1.  
a. Calculer les limites de la fonction  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

b. Interpréter graphiquement les résultats.

2.  
a. Calculer  $f'(x)$ ,  $f'$  désignant la fonction dérivée de  $f$ .

b. Étudier le sens de variations de la fonction  $f$ , puis dresser son tableau de variations.

3.  
a. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 0.

b. À l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe  $(C)$  par rapport à la droite  $(T)$ .

4. Tracer la droite  $(T)$ , les asymptotes et la courbe  $(C)$ .

## La bonne méthode

### PARTIE A

1. Dériver la fonction  $g$  et étudier le signe de cette dérivée.

2. Utiliser la question précédente.

### PARTIE B

1.  
a. Factoriser en  $+\infty$  et utiliser une somme de limites en  $-\infty$ .

b. Trouver les asymptotes en utilisant la question 1.

2.  
a. Calcul simple de la fonction dérivée de  $f$ .

b. Étudier le signe de  $f$ .

3.  
a. Utiliser l'équation de la tangente au point d'abscisse  $a$ :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

b. Étudier le signe de la différence entre  $f(x)$  et l'équation de la tangente.

4. Tracer le repère. Attention aux unités.

