

## Énoncé

### PARTIE A

Soit  $f$  la fonction définie sur

$\mathbb{R}$   
par  $f(x) = x e^{1-x}$ .

1. Vérifier que pour tout réel  $x$ , on a  $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$ .
2. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .
3. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement cette limite.
4. Déterminer la dérivée de la fonction  $f$ .
5. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , puis dresser le tableau de variations.

### PARTIE B

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère les fonctions  $g_n$  et  $b_n$  définies sur

$\mathbb{R}$   
par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \text{ et } b_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}.$$

1. Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$ .  
On obtient alors, pour tout réel  $x \neq 1$  :  $g_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ .
2. Comparer les fonctions  $b_n$  et  $g'_n$ ,  $g'_n$  étant la dérivée de  $g_n$ . En déduire que, pour tout réel  $x \neq 1$  :  $h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$ .
3. Soit  $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ ,  $f$  étant la fonction définie dans la partie A.  
En utilisant les résultats de la partie B, déterminer une expression de  $S_n$  puis sa limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## La bonne méthode

### PARTIE A

1. Utiliser les règles de calcul de la fonction exponentielle.
2. Limite par produit et composition de fonctions.
3. Utiliser le résultat de la question 1, sachant que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .
4. Dérivée un produit de fonctions.
5. Étudier le signe de la dérivée et faire le tableau de variations.

### PARTIE B

1. Remplacer  $g_n(x)$  et développer.
2. Utiliser la dérivée du quotient de deux fonctions. Remarquer une égalité grâce au résultat du 1.
3. Introduire dans  $S_n$  la fonction  $f(x) = x e^{1-x}$ , puis remarquer l'égalité avec  $b_n(e^{-1})$ . Enfin, utiliser  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .