Énoncé

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur
$\mathbb{R}$
par $f(x) = x\,e^{1-x}$.

1. Vérifier que pour tout réel x, on a $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

4. Déterminer la dérivée de la fonction f.

5. Étudier les variations de la fonction f sur
$\mathbb{R}$
, puis dresser le tableau de variations.

PARTIE B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur
$\mathbb{R}$
par :
$g_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n$ et $h_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$.

1. Vérifier que pour tout réel x, $(1 - x)\, g_n(x) = 1 - x^{n+1}$.
On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$: $g_x(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

2. Comparer les fonctions h_n et g'_n, g'_n étant la dérivée de g_n. En déduire que, pour tout réel $x \neq 1$: $h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

3. Soit $S_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$, f étant la fonction définie dans la partie A.
En utilisant les résultats de la partie B, déterminer une expression de S_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

La bonne méthode

PARTIE A

1. Utiliser les règles de calcul de la fonction exponentielle.

2. Limite par produit et composition de fonctions.

3. Utiliser le résultat de la question 1, sachant que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

4. Dériver un produit de fonctions.

5. Étudier le signe de la dérivée et faire le tableau de variations.

PARTIE B

1. Remplacer $g_n(x)$ et développer.

2. Utiliser la dérivée du quotient de deux fonctions. Remarquer une égalité grâce au résultat du 1.

3. Introduire dans S_n la fonction $f(x) = x\,e^{1-x}$, puis remarquer l'égalité avec $h_n(e^{-1})$. Enfin, utiliser $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.