

Énoncé

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \end{cases}.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,
 $u_n \geq n$

.

b. Justifier que la suite (u_n) est croissante.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

2. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout
 $n \geq n_0$

,
 $u_n \geq 10^p$

? L'ensemble des entiers n_0 tels que
 $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq 10^p$

est donc un sous-ensemble non vide de

\mathbb{N}

, ce sous-ensemble admet donc un plus petit élément m_0 . On s'intéresse maintenant au plus petit entier m_0 .

3. Proposer un script en Python qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier m_0 tel que
 $n \geq m_0 \Rightarrow u_n \geq 10^p$

. Déterminer à l'aide du programme cet entier m_0 pour la valeur $p = 3$.

La bonne méthode

1. On remplace n par 0 puis par 1 dans la relation définissant la suite.

2. a. On procède, comme l'énoncé le demande, par récurrence. On prend bien soin d'argumenter correctement l'hérédité.

2. b. On évalue le signe de $u_{n+1} - u_n$ à la lumière de ce qui précède.

2. c. On utilise le théorème de comparaison.

3. Il faut revenir à la définition du résultat obtenu à la question précédente.

4. Il s'agit d'un algorithme dit de seuil, on construit une boucle tant que.