Suites, sujet 1. Suites récurrentes d'ordre 1. D'après sujet Bac S, Amérique du Sud, novembre 1994

Énoncé

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs, telle que $u_0 = 5$ et vérifiant pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n,
$u_n \geqslant 4$
.

2. On se propose, dans cette question, d'étudier de deux manières la convergence de cette suite.

Méthode 1.

a) Démontrer que la suite est décroissante.

b) Déduire de ce qui précède que la suite est convergente, puis trouver sa limite.

Méthode 2.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} - 4 \leqslant \frac{1}{4}(u_n - 4)$
.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$0 \leqslant u_n - 4 \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$
.

c. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

La bonne méthode

1. On peut procéder par récurrence en utilisant le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x + 12}$.

2.
Méthode 1.
a. Il y a de nombreuses façons de résoudre cette question. On peut procéder par récurrence ou évaluer le signe de $u_{n+1} - u_n$, par exemple.

b. La suite est décroissante et minorée. S'agissant de la limite l, il va s'agir de justifier qu'elle est solution de l'équation $x = \sqrt{x + 12}$, et qu'elle est supérieure ou égale à 4.

Méthode 2.
a. On va utiliser la méthode dite de la quantité conjuguée

b. On va procéder par récurrence.

c. On doit penser au théorème des gendarmes.