

Énoncé

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O; i; j; k)$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(2; 1; 4)$, $(4; -1; 0)$, $(0; 3; 2)$ et $(4; 3; -2)$.

1. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).
3. Soit M un point de la droite (CD).
 - a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.
 - b. On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées $(3; 3; -1)$ Vérifier que les droites (CD) et (BH) sont perpendiculaires.
 - c. Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2 .

4.
 - a. Démontrer que le vecteur $n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

- b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
 - c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et orthogonale au plan (BCD).
 - d. Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3})$
5. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

La bonne méthode

1. Autrement dit les vecteurs \vec{BA} , \vec{BC} et \vec{BD} sont-ils coplanaires ?
 2. (CD) est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ alignés avec C et D.
 3.
 - a. La question précédente permet de caractériser les points de (CD) en fonction d'un paramètre t , on calcule BM^2 en fonction de t , et on détermine la valeur de t qui minimise la fonction.
 3.
 - b. Le produit scalaire est le bon outil.
 3.
 - c. Ce qui précède permet d'affirmer que [BH] est la hauteur du triangle BCD issue de B.
 4.
 - a. Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
 4.
 - b. Si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
 4.
 - c. On connaît un point de la droite et un vecteur directeur.
 4.
 - d. Le point d'intersection est élément de (Δ) ce qui contraint ses coordonnées. Et celles-ci vérifient aussi une équation cartésienne de (BCD).
 5. Le volume d'un tétraèdre est $V = \frac{B \times h}{3}$ où B désigne la surface de la base et h la hauteur du solide.
-

