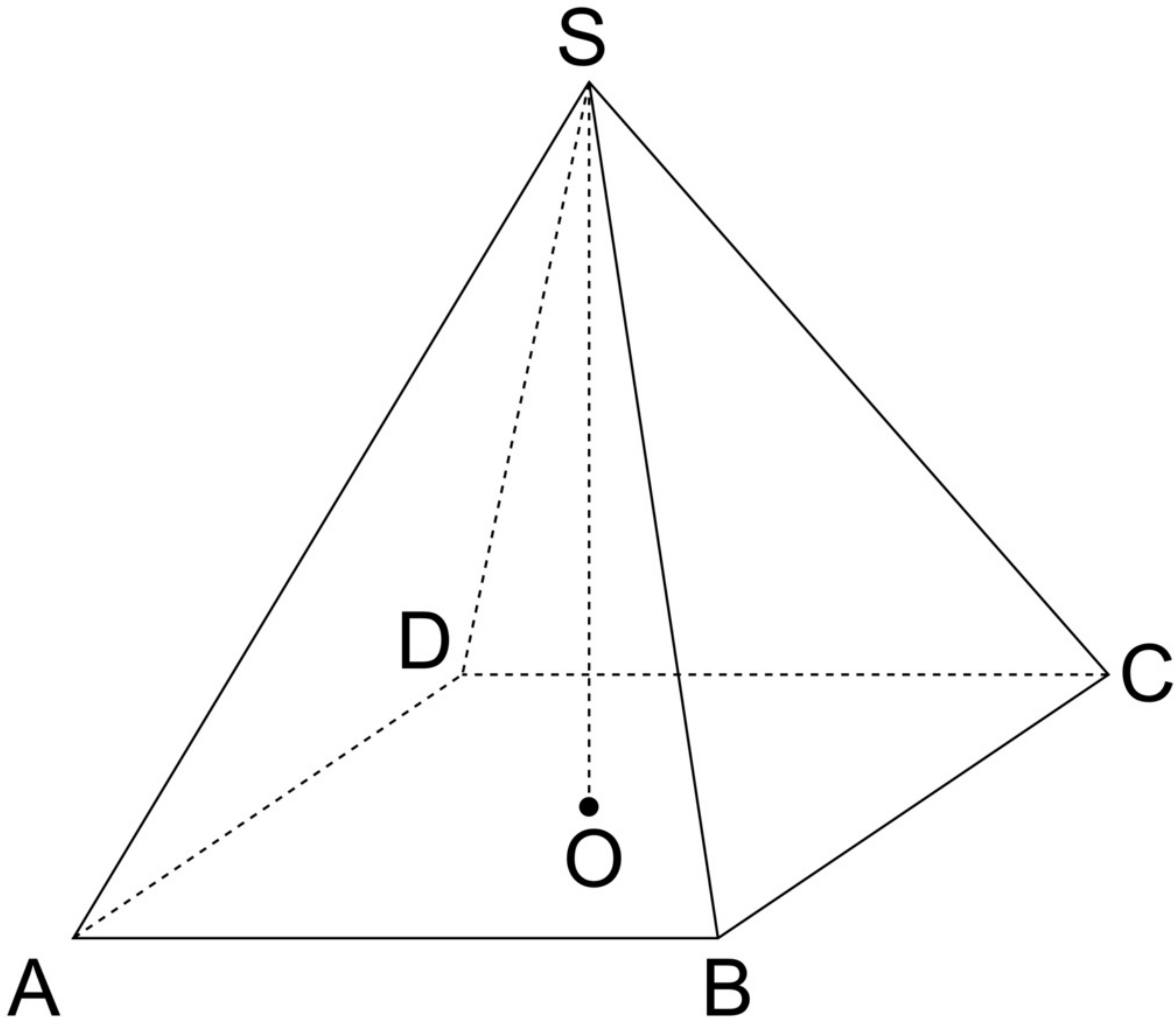
Énoncé

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(O\,; i, j, k\right)$.
Soit la pyramide régulière ABCDS à base carrée telle que :

- O centre de la base ABCD ;
- A(−1 ; −1 ; 0), B(1 ; −1 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), D(−1 ; 1 ; 0) ;
- $AS = BS = CS = DS = 3\sqrt{2}$.



1.
a. Calculer AC.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS}$ de deux manières différentes pour en déduire l'angle $\widehat{CAS}$ arrondi au degré près.

2.
On admet que S(0 ; 0 ; 4) Soient M, N, P et Q tels que :

- M milieu de l'arête [SC] ;
- N milieu de l'arête [SA] ;
- P vérifiant $\overrightarrow{AP} = \frac{11}{6}\overrightarrow{AB}$;

- Q vérifiant $\overrightarrow{AQ} = \frac{11}{6}\overrightarrow{AD}$.

a. Calculer les coordonnées des points M, N, P et Q.

b. Calculer $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NQ}$

c. En déduire les positions relatives de la droite (AM) et du plan (NPQ).

La bonne méthode

1.

a. Utiliser la formule de la distance entre deux points dans un repère orthonormé de l'espace.

b. Calculer le produit scalaire en utilisant la formule de polarisation $u \cdot v = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$ et la définition du produit scalaire $u \cdot v = \|u\| \times \|v\| \times \cos\left(u, v\right)$.

2.

a. Utiliser la formule des coordonnées d'un milieu pour les points M et N. Utiliser l'égalité vectorielle pour les points P et Q.

b. Calculer le produit scalaire en utilisant les coordonnées.

c. Déduire des questions précédentes l'orthogonalité de vecteurs.
