Fiche

En pratique, déterminer une primitive d'une fonction, c'est chercher une fonction dont la dérivée est la fonction donnée. Pour une fonction puissance, ou plus généralement une fonction polynôme, cette détermination est facile : il suffit d'augmenter d'une unité l'exposant. C'est plus difficile dans le cas d'une fonction rationnelle ; en particulier, la recherche d'une primitive de la fonction inverse conduit à une définition de la fonction logarithme népérien. Le calcul intégral et la résolution d'équations différentielles sont les applications directes de la détermination de primitives.

I. Comment reconnaître une primitive d'une fonction ?

Trouver une primitive d'une fonction f, c'est trouver une fonction dont la dérivée est la fonction f donnée.
Propriété : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $[a\,;\,b]$. F est une primitive de f si et seulement si pour tout $x \in [a\,;b]$, $F'(x) = f(x)$.
Propriété : Il existe une infinité de primitives d'une fonction donnée. Elles sont définies à une constante près. Si F est une primitive de f, alors pour tout $c \in \mathbb{R}$, $F + c$ est aussi une primitive de f.

Opérations et primitives usuelles

Propriété :

- Si F et G sont des primitives respectivement des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I, et c un réel, alors $c \times F$ est une primitive de $c \times f$ sur I.

On a le tableau des primitives usuelles suivant :

primitives des fonctions usuelles : avec $C \in \mathbb{R}$

$f(x)$	$F(x)$	D_f
k avec $k \in \mathbb{R}$	$kx + C$	$\mathbb{R}$
x^n avec $n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$ avec $n \neq 1$	$-\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{x^{n-1}} + C$	$]-\infty;0[\ \cup\ ]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$]0;+\infty[$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$

II. Quelles sont les primitives des fonctions polynômes ?

Propriété : Les fonctions puissance définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ont pour primitives les fonctions $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$.
Une fonction polynôme est la somme de fonctions puissance. Pour en trouver une primitive, il suffit de chercher une primitive de chacun des termes.
Exemple : Soit $f(x) = x^2 + 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
Une primitive de f est $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$.

III. Quelles sont les primitives des fonctions inverse ?

On peut généraliser aux exposants entiers relatifs n, $n \neq -1$, la forme générale des primitives des fonctions puissances.

Propriété : Les fonctions inverses, définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^n$, n entier négatif, $n \neq -1$, ont pour primitives les fonctions $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, sur $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$.

Propriété : Sur $]0\,;+\infty[$, la fonction logarithme népérien est la primitive F de la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ telle que $F(1) = 0$.

IV. Comment calculer une primitive d'une fonction composée ?

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = u'(x) \times (u(x))^n$, $n \in \mathbb{N}$, ont pour primitives les fonctions $F(x) = \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Les fonctions définies pour $u(x) \neq 0$ par $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ ont pour primitives les fonctions $F(x) = ln(u(x)) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

V. Comment déterminer une primitive d'une fonction rationnelle ?

Pour déterminer une primitive d'une fonction rationnelle, on décompose celle-ci en une somme d'une fonction polynôme et d'une fonction inverse.

Exemple : Soit $f(x) = \frac{x^2+2}{x-3}$ définie sur $]3\,;+\infty[$. Elle peut s'écrire sous la forme : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$.

On réduit au même dénominateur : $f(x) = \frac{(ax+b)(x-3)+c}{x-3}$.

On développe le numérateur : $f(x) = \frac{ax^2+(b-3a)x-3b+c}{x-3}$.

Par identification des coefficients des termes de même degré du numérateur, on obtient le système :

$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = 0 \\ -3b + c = 2 \end{cases}$, donc $a = 1$, $b = 3$ et $c = 11$.

On a donc $f(x) = x + 3 + \frac{11}{x-3}$.

On en déduit une primitive $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x + 11\ln|x-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + 11\ln(x-3)$, car $x - 3 > 0$ sur $]3\,; +\infty[$.

VI. Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

Les équations différentielles sont des égalités dans lesquelles apparaissent une fonction et au moins l'une de ses dérivées successives.

L'ordre de l'équation est égal au rang le plus élevé de la dérivée.

Les équations différentielles trouvent des applications en économie, en physique et en biologie.

VII. Comment résoudre une équation différentielle de premier ordre sans second membre ?

Une équation différentielle de premier ordre sans second membre est de la forme $f'(x) + af(x) = 0$ $(a \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0)$.

De manière simplifiée, ces équations s'écrivent : $y' + ay = 0$.

Résoudre cette équation, c'est déterminer toutes les fonctions f qui conviennent.

On a : $y' + ay = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a$, car $y \neq 0$.

Une primitive de $\frac{y'}{y}$ est $\ln|y|$, alors on a : $\ln|y| = -ax + C$ soit $(C \in \mathbb{R})$, soit $e^{\ln|y|} = e^{-ax+c} \Leftrightarrow |y| = e^{-ax} \times e^c \Leftrightarrow y = \pm e^c \times e^{-ax}$.

En posant $\lambda = e^c$ (ou $-e^c$), on en déduit la famille des fonctions solutions : $y = \lambda e^{-ax}$.

La constante λ est déterminée par l'image d'une valeur particulière de la variable.

Exemple : Soit l'équation différentielle $y' = 5y$, et soit $c \in \mathbb{R}$.

$y' = 5y \Leftrightarrow y' - 5y = 0 \Leftrightarrow y = \lambda e^{5x}$.

Ainsi les fonctions numériques y à une variable x qui vérifient $y' = 5y$ sont les fonctions définies pour tout réel x par $y(x)=\lambda e^{5x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si, de plus, $y(2) = 1$, alors $\lambda e^{5\times 2} = 1 \Leftrightarrow \lambda = e^{-10}$. Dans ce cas, l'unique solution est la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = e^{5x-10}$.

VIII. Comment résoudre une équation différentielle de premier ordre avec second membre ?

Une équation différentielle du premier ordre avec second membre se présente sous la forme : $y' + ay = \Phi(x)$, où Φ est une fonction de variable x.

Pour résoudre cette équation, on cherche une solution particulière y_1 dont la forme sera donnée par l'énoncé.

Les solutions de l'équation sont alors de la forme : $y = \lambda e^{-ax} + y_1$.

Exemple 1 : Soit l'équation différentielle : $y' = 5y + 3$.

Une solution particulière y_1 est, par exemple, $y_1 = -\frac{3}{5}$.

Les solutions de $y' = 5y$ sont les fonctions y telles que $y(x) = \lambda e^{5x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi, les solutions de l'équation différentielle $y' = 5y + 3$ sont les fonctions y définies pour tout réel x par $y(x) = -\frac{3}{5} + \lambda e^{5x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 : Soit l'équation différentielle : $y' = 5y + e^{2020x}$.

On va chercher une solution particulière y_1 sous la forme $y_1 = \alpha(x)e^{5x}$, avec α une fonction que l'on va déterminer.

$y_1'(x) = \alpha'(x)e^{5x} + 5\alpha(x)e^{5x}$.

Donc $\alpha'(x)e^{5x} + 5\alpha(x)e^{5x} = 5\alpha(x)e^{5x} + e^{2020x} \Leftrightarrow \alpha'(x)e^{5x} = e^{2020x}$.

Donc $\alpha'(x) = \frac{e^{2020x}}{e^{5x}} = e^{2015x} \Leftrightarrow \alpha(x) = \frac{1}{2015}e^{2015x}$.

Ainsi $y_1(x) = \frac{1}{2015}e^{2015x}\,e^{5x} = \frac{1}{2015}e^{2020x}$.

Les solutions de $y' = 5y$ sont les fonctions y telles que $y(x) = \lambda e^{5x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi, les solutions de l'équation différentielle $y' = 5y + e^{2020x}$ sont les fonctions y définies pour tout réel x par $y(x) = \frac{1}{2015}e^{2020x} + \lambda e^{5x}$,

$\lambda \in \mathbb{R}$.

Zoom sur... les primitives

Fonction dérivée

Une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I. Alors la fonction qui, à tout réel $x \in \mathrm{I}$, associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f'.

Primitive

Soit f une fonction définie continue sur un intervalle I. Une primitive de la fonction f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $F'(x) = f(x)$.

Lien entre continuité et primitive

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet une primitive F sur l'intervalle I.

Plusieurs primitives pour une même fonction *f*

• Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I, alors toutes les primitives de la fonction f sur I sont les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, où C est une constante réelle quelconque.

• Soit I un intervalle contenant une valeur x_0 et y_0 un réel connu. Il existe une unique primitive F de la fonction f sur I vérifiant la condition : $F(x_0) = y_0$.

Primitives et opérations

• Soient F et G des primitives respectives des fonctions f et g sur l'intervalle I. Alors $F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$ sur l'intervalle I.

• Soient F une primitive de f sur un intervalle I, et k un nombre réel. Alors $k \times F$ est une primitive de la fonction $k \times f$ sur l'intervalle I.

Tableaux des primitives usuelles

$f(x)$	Une primitive $F(x)$
$a_{\text{(constante)}}$	ax
x	$\frac{1}{2}x^2$
x^n, $n > 0$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x^n}$, $n \geq 2$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$, $x > 0$
e^x	e^x

Fonction f	Une primitive F
$u'u^n$, $n > 0$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u^n}$, $n \geq 2$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$, $u > 0$
$u'e^u$	e^u

Exercice n°1

Exercice n°2

Histoire des mathématiques : calcul différentiel

Le calcul différentiel s'est développé de concert avec la physique au XVII^{e} siècle. Parmi les initiateurs, Fermat, Huygens, Pascal et Barrow reconnaissent que le problème des aires (le calcul intégral) est le problème inverse de celui des tangentes (la dérivation). De plus, ils remarquent que le calcul différentiel peut être abordé à partir des travaux sur la quadrature de l'hyperbole, et qu'ils tournent tous autour de la question de « l'infiniment petit » qu'ils ne savent pas encore justifier.
Les travaux de Newton et Leibniz révèlent, par la suite, deux visions différentes du calcul infinitésimal. En effet, Newton aborde souvent les mathématiques du point de vue physique (il compare la notion actuelle de limite avec la notion de vitesse instantanée, ce qui lui permet de négliger les quantités infinitésimales), alors que Leibniz l'aborde de façon philosophique (il travaille en parallèle sur l'existence de l'infiniment petit dans l'univers). La justification de telles méthodes nécessite donc une mise au point de la notion de limite qui reste intuitive à cette époque.
Des fondations solides sont finalement proposées dans le *Cours d'Analyse* de Cauchy (1821, 1823) qui définit précisément la notion de limites et en fait le point de départ de l'analyse.
Parallèlement, les résolutions d'équations différentielles, provenant de la mécanique ou des mathématiques, se structurent, notamment grâce au lien entre le calcul différentiel et les séries (Newton, Euler, d'Alembert, Lagrange, Cauchy, etc.), ce qui illustre les ponts entre le discret et le continu.