Fonction sinus et cosinus (non évaluable à l'épreuve écrite)

Fiche

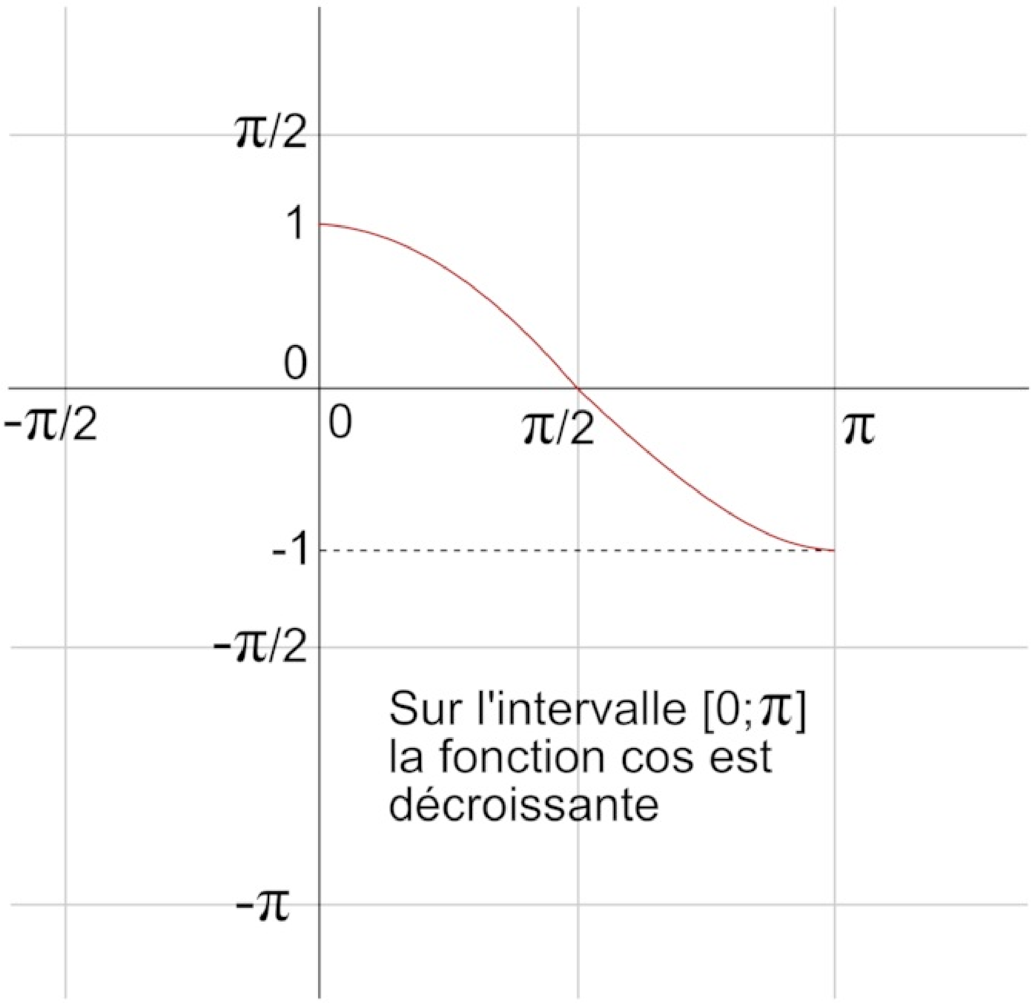
Parmi l'ensemble des fonctions étudiées, les fonctions sinus et cosinus présentent des particularités spécifiques, notamment la périodicité. L'étude de ces fonctions sur une période permet d'obtenir la représentation graphique de toute la fonction. On pourra retrouver graphiquement les propriétés du sinus et du cosinus d'un angle étudiées en classe de Première.

I. Comment peut-on définir les fonctions trigonométriques ?

Définition : Soit un réel x On note M le point du cercle trigonométrique correspondant à un angle orienté de x rad.

• Le **cosinus** de x, noté $\cos x$, est l'abscisse de M.

• Le **sinus** de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée de M.



On a les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Pour tout réel x, on a :

• $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$

• $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

Définition : La **fonction cosinus**, notée cos, est la fonction qui à tout réel x associe le nombre réel $\cos x$.
La **fonction sinus**, notée sin, est la fonction qui à tout réel x associe le nombre réel $\sin x$.

II. Quelles sont les règles de dérivation des fonctions trigonométriques ?

Propriétés : Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur l'ensemble des réels.
Pour tout réel x, $(\cos x)' = -\sin x$ et $(\sin x)' = \cos x$.
Soient a et b deux nombres réels. Pour tout réel x, $(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$ et $(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$.
Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos(4x+5)$.
La dérivée de la fonction f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = -12\sin(4x+5)$.

III. Que sait-on sur la parité et la périodicité des fonctions sinus et cosinus ?

Propriété : Pour tout réel x :

- $\cos(-x) = \cos x$, la fonction cosinus est paire ;
- $\sin(-x) = -\sin x$, la fonction sinus est impaire ;
- $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2\pi) = \sin x$, les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π. (On dit aussi qu'elles sont 2π-périodiques.

Propriété : Soit a un nombre réel.
Les solutions de l'équation $\cos x = \cos a$ sont les réels de la forme :
$a + 2k\pi$ ou $-a + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Les solutions de l'équation $\sin x = \sin a$ sont les réels de la forme :
$a + 2k\pi$ ou $\pi - a + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

IV. Quelles sont les formules d'addition et de duplication ?

Soient a et b deux nombres réels, on a :

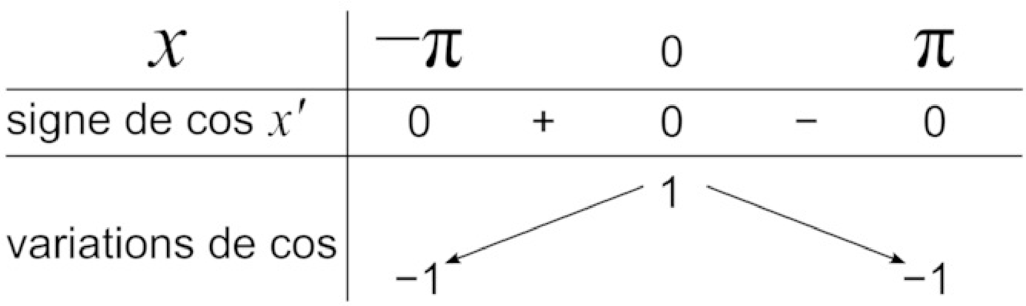
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

V. Quelles sont les limites usuelles ?

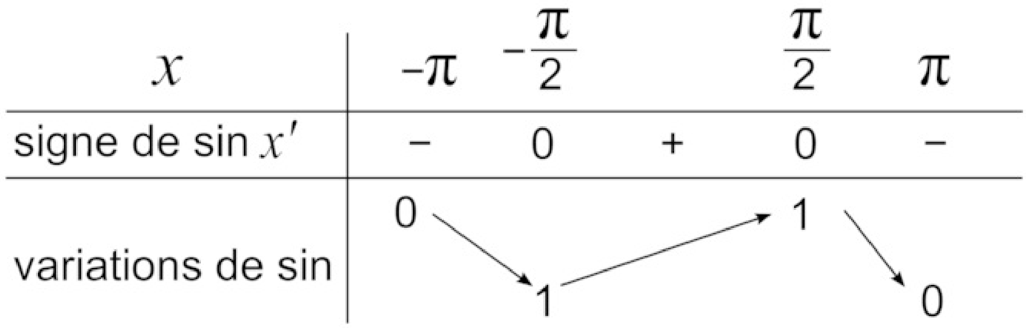
On a : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

VI. Quelles sont les variations ?

Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, la fonction cosinus a le tableau de variations suivant :



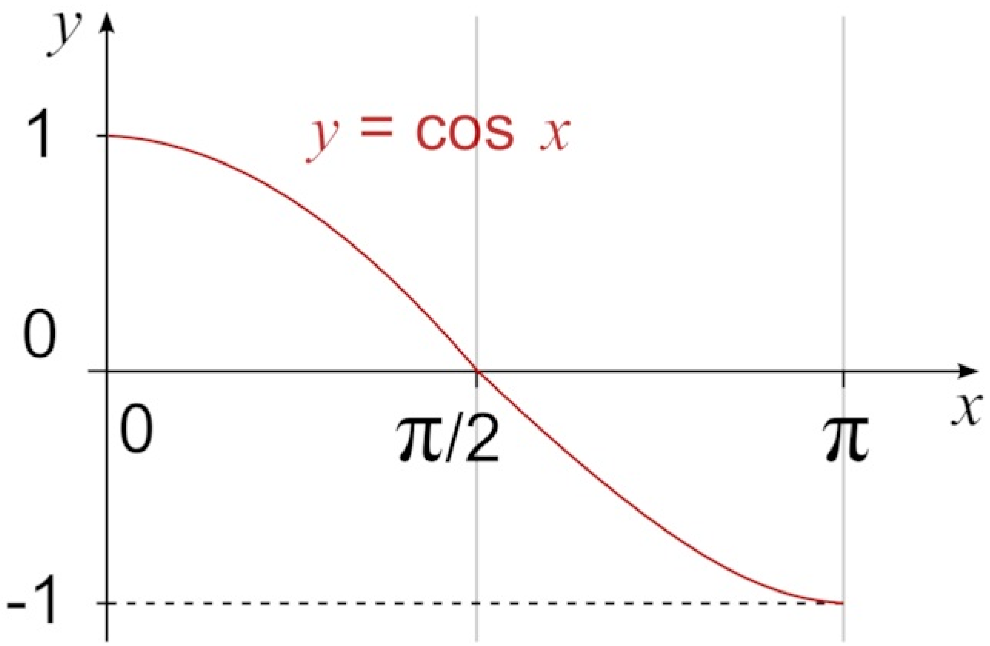
Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, la fonction sinus a le tableau de variations suivant :



VII. Quelles sont les représentations graphiques sur [0, π] et sur ℝ ?

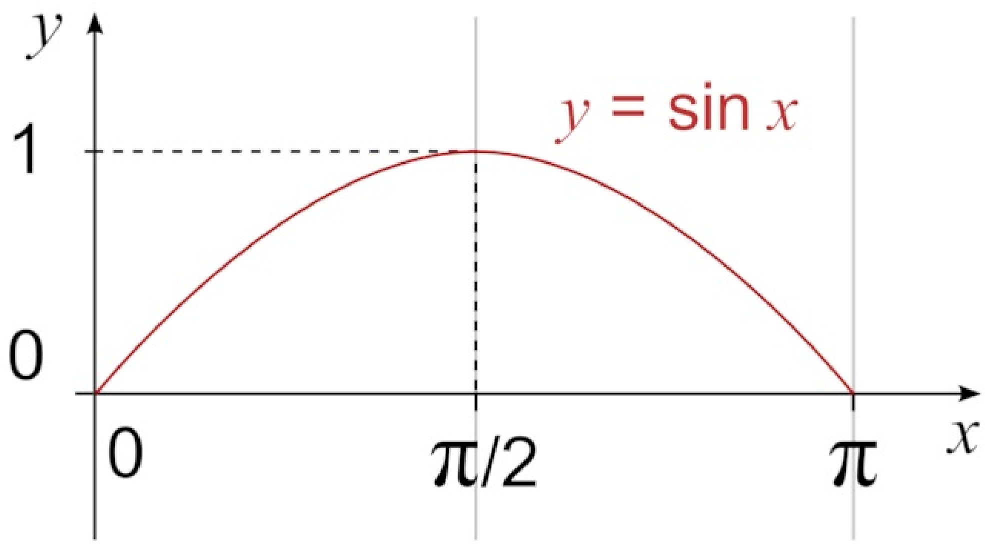
La fonction cosinus

La fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi]$.

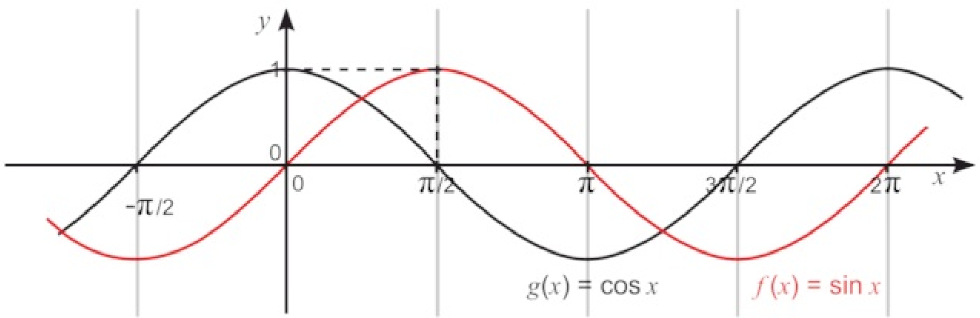


La fonction sinus

La fonction sinus est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.



Comme les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques, on obtient les courbes complètes des fonctions cosinus et sinus en effectuant des translations de vecteurs $\pm 2\pi i$.



VIII. Comment peut-on résoudre cos$x$ = a ou cos$x$ ⩽ a ?

Propriété : Soit a un nombre réel. Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue x, $\cos x = a$ dépend de la valeur de a.

• Si $a \in [-1, 1]$ alors il existe un unique réel $b \in [0, \pi]$ tel que $\cos b = a$.
On a alors : $\cos x = a \Leftrightarrow x = b$ ou $x = -b$.

• Si $a \notin [-1, 1]$ alors $\cos x = a$ n'admet aucune solution réelle et l'ensemble des solutions est l'ensemble vide.

Exemple : Résolvons dans $[-\pi, \pi]$ l'équation $\cos x = 0{,}5$. On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,5$. Donc :
$\cos x = 0,5 \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$.
Ainsi l'ensemble des solutions est $S = \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$.
Propriété : Soit a un nombre réel. Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, l'ensemble des solutions de l'inéquation d'inconnue x, $\cos x \leqslant a$ dépend de la valeur de a.

• Si $a < -1$, alors l'inéquation n'admet aucune solution réelle et l'ensemble des solutions est l'ensemble vide.

• Si $a > 1$, alors l'inéquation a comme ensemble de solutions l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

• Si $a \in [-1, 1]$, alors il existe un unique réel $b \in [0, \pi]$ tel que $\cos b = a$.
On a alors : $\cos x \leq a \Leftrightarrow x \in [-\pi, -b] \cup [b, \pi]$.
Exemple : Résolvons dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc :

$\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$.
Ainsi l'ensemble des solutions est $S = \left[-\pi, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$.

Exercice n°1

Exercice n°2

Exercice n°3

Exercice n°4

Histoire des mathématiques : fonctions trigonométriques

• L'utilisation la plus ancienne du sinus apparaît dans des écrits en indien vers le VII^{e} siècle av. J.-C. Le sinus de $\frac{\pi}{4}$ y est correctement calculé, même si le sens général du sinus n'est pas développé.

• Hipparque (II^{e} siècle av. J.-C.) est le premier mathématicien à disposer de tables trigonométriques qui lui servent à estimer des grandeurs d'astronomie.

• Ptolémée (au II^{e} siècle) poursuit le travail d'Hipparque en établissant des égalités de rapport, équivalentes aux actuelles formules d'addition. Il dresse une table trigonométrique très complète.

• Au V^{e} siècle, en Inde, le sinus est défini pour la première fois au sens général, c'est-à-dire à partir de la relation entre la moitié d'un angle et la moitié d'une corde. Le cosinus, initialement appelé le contre-sinus, est lui aussi défini comme l'inverse du sinus.

• De nombreux approfondissements sont apportés à ces définitions : par les mathématiciens du monde arabe (complément de l'astronomie), par les Indiens (développements en séries infinies), par les disciples de l'école du Kerala (développements en série de π, etc.), et par Rheticus qui fait le lien avec le triangle rectangle vers le XVI^{e} siècle.

• Enfin, Moivre et Euler relient les fonctions trigonométriques avec les actuels nombres complexes. Cela permet de retrouver des formules de trigonométrie, en incluant le nombre imaginaire i.

• Ainsi, les procédés par lesquels les mathématiciens ont construit et tabulé les fonctions trigonométriques illustrent les liens importants entre discret et continu. Ces travaux indiquent une perception intuitive claire des questions de convergence.