Fonction logarithme

Fiche

La fonction logarithme népérien est très utile pour simplifier certaines expressions mathématiques. Elle permet de convertir une multiplication en addition, une division en soustraction, une puissance en multiplication, une racine en division. Elle offre également la possibilité de résoudre des équations ou des inéquations contenant des exponentielles ou encore dont l'inconnue, qui est un nombre entier, figure en exposant.

I. Comment peut-on définir la fonction logarithme népérien ?

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la seule fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui à tout réel x strictement positif associe l'unique solution de l'équation d'inconnue y : $\mathrm{e}^y = x$.
On note alors cette solution : $y = \ln x$.
D'après cette définition, on remarque que la fonction logarithme népérien est définie comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle, étudiée en classe de Première.
Conséquences :
Pour tout $x > 0$, on a :

- $y = \ln x$ si et seulement si $x = \mathrm{e}^y$;
- $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.

Pour tout réel y, $\ln(\mathrm{e}^y) = y$.
$\ln 1 = 0$; $\ln \mathrm{e} = 1$; $\ln \frac{1}{\mathrm{e}} = -1$.

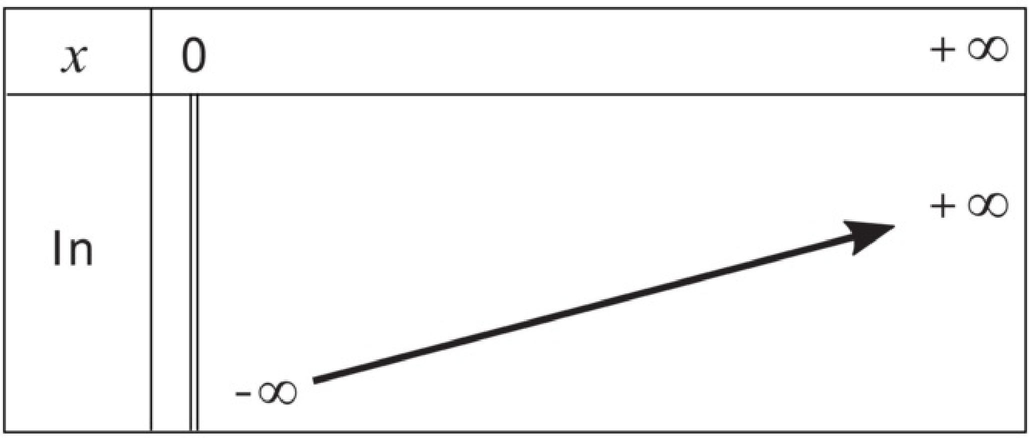
II. Quelles sont les variations de la fonction logarithme népérien ?

Fonction dérivée

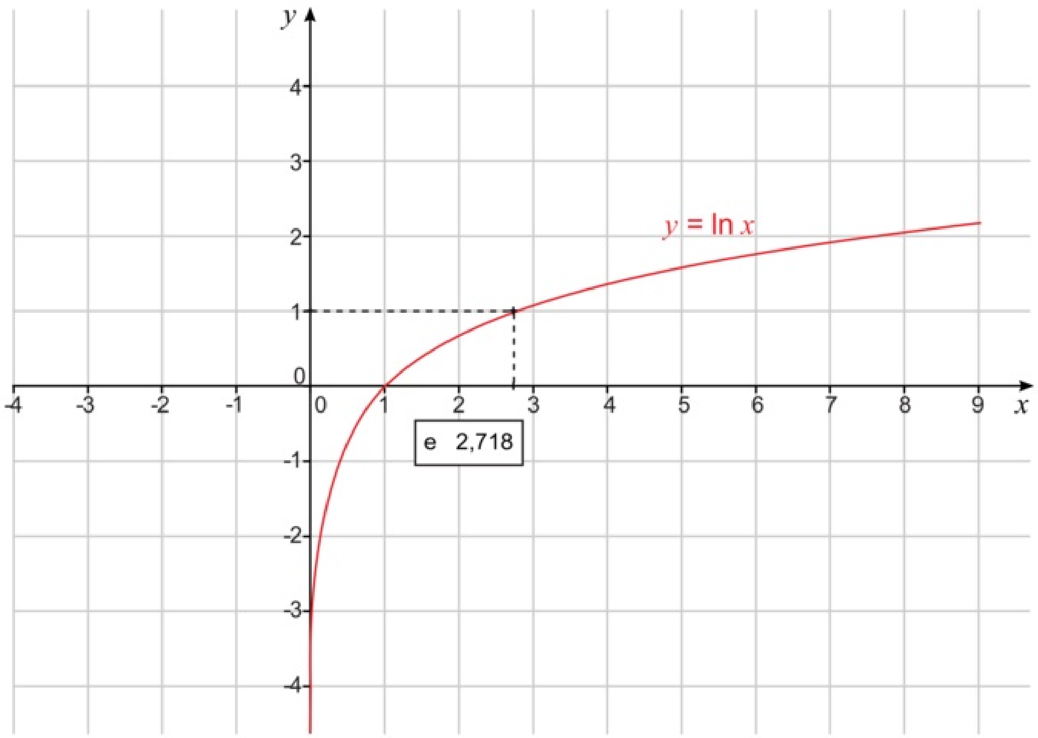
Pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
Remarque : La fonction logarithme népérien se définie aussi comme étant l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui s'annule lorsque $x = 1$.

Tableau de variations

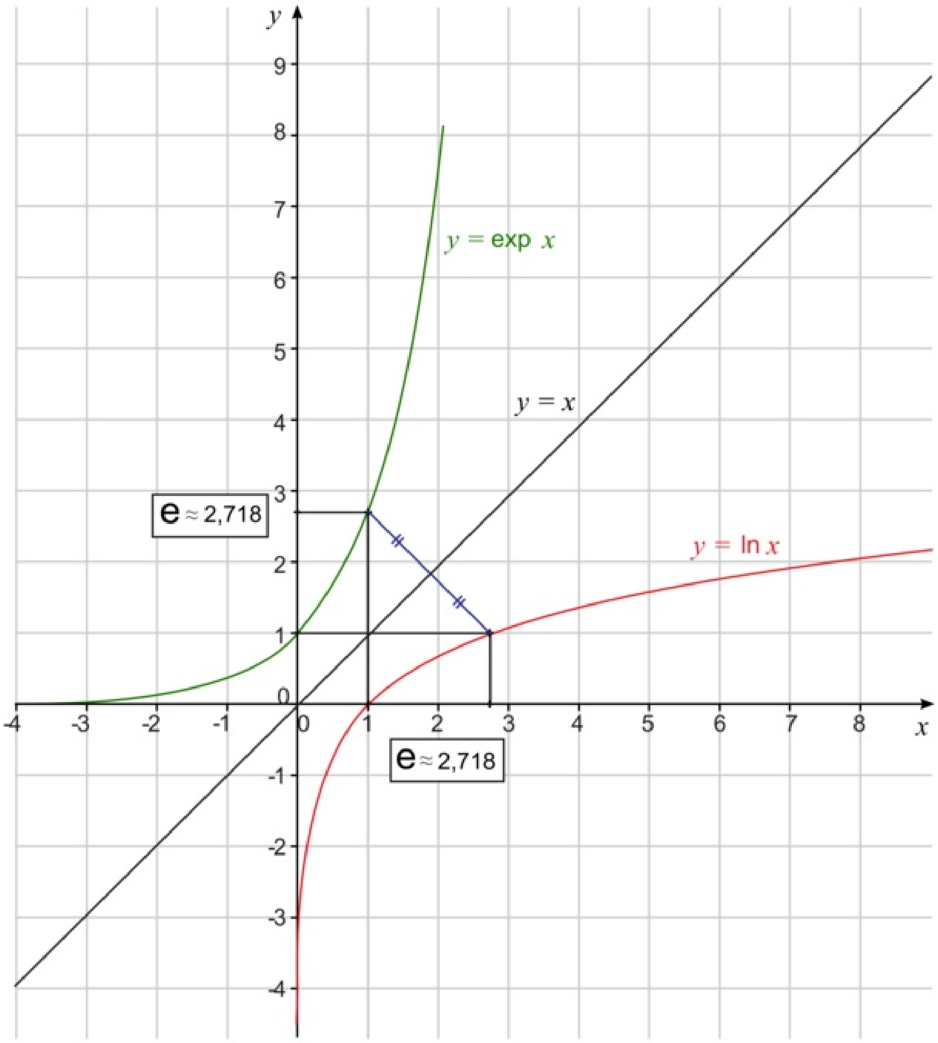
Pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$.
La fonction logarithme népérien est donc strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
De plus, $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln x = +\infty$.



Courbe représentative



Les courbes représentatives des fonctions ln (logarithme népérien) et exp (exponentielle) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Étude de la fonction composée $\ln \circ u$

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée $\ln \circ u : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I, et on a :$(\ln \circ u)' = (\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

III. Quelles propriétés algébriques de la fonction ln faut-il connaître ?

Relation fonctionnelle

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Exemple : $\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$.

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, pour tout nombre entier n, on a :

- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$;
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
- $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$;
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Exemple : $\ln 3 + \ln 4 + \ln\frac{1}{12} = \ln(3 \times 4) - \ln 12 = \ln 12 - \ln 12 = 0$.

IV. Comment peut-on étudier une fonction contenant un logarithme népérien ?

Dérivation de fonction contenant ln

La fonction étudiée peut être une fonction de référence : polynôme, rationnelle ou autre, comportant en plus la notation $\ln x$.
On doit alors se rappeler que : pour tout réel $x > 0$, on a $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
La fonction étudiée peut aussi être une fonction de référence : polynôme, rationnelle ou autre, composée avec la fonction logarithme népérien.
On doit alors se rappeler que : pour toute fonction u strictement positive et dérivable sur un intervalle I, on a : $(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.
Lorsque la fonction est plus complexe, on a souvent recours à une fonction auxiliaire pour connaître le signe de la dérivée de la fonction donnée.

Étude de limites particulières contenant la fonction logarithme népérien

Nombre dérivé en 1 de la fonction logarithme népérien : $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$.
Par définition de la dérivée, on a : $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)-\ln 1}{1+h-1} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$.
Ainsi, on a : $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
Pour calculer la limite usuelle de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$, on remarque que la fonction $x \mapsto \ln x$ croît infiniment moins vite que la fonction $x \mapsto x$.
Ainsi, on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$, et plus généralement : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0^+$ (pour $\alpha > 0$).
Pour calculer la limite usuelle de $x\ln x$ en 0^+, on utilise la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$, en effectuant le changement de variable : $X = \frac{1}{x}$. Ainsi, on a : $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$.

V. Comment résoudre une équation ou une inéquation avec la fonction ln ?

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

- $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$;
- $\ln a < \ln b$ si et seulement si $a < b$;
- $\ln a > \ln b$ si et seulement si $a > b$.

Exemple : $\ln(3x+1) > 2\ln 2 \Leftrightarrow \ln(3x+1) > \ln 4 \Leftrightarrow 3x+1 > 4 \Leftrightarrow 3x > 3 \Leftrightarrow x > 1$.

Algorithme de Briggs

Le programme suivant permet de déterminer une valeur approchée du logarithme népérien d'un réel strictement positif x (avec une certaine précision notée epsilon).
Par exemple, si l'on exécute le programme et que l'on tape dans la console briggs (3,0.001) alors l'affichage sera 1.098907006638001 alors que $\ln 3 \approx 1,0986122886681$.
Soit une erreur d'environ 0,0003.

```python
from math import*

def briggs(x,epsilon):
    n=0
    while abs(x-1)>epsilon:
        x=sqrt(x)
        n=n+1
    return (x-1)*2**n
```

Zoom sur... la fonction logarithme décimal

Définition

La fonction logarithme décimal est la fonction, notée log, définie sur $]0;+\infty[$ par : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

Variation

Comme la fonction ln est strictement croissant sur $]0;+\infty[$ et $\ln 10 > 0$, alors la fonction log est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et $\log 1 = 0$.

Remarque

La fonction logarithme décimal était très utilisée pour de nombreux calculs numériques avant l'introduction des calculatrices. Cette fonction a aussi de nombreuses applications, notamment en chimie et en physique.

Propriétés algébriques de la fonction log

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et tout nombre entier n, on a :

- $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$;
- $\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b)$;
- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$;
- $\log(a^n) = n \times \log(a)$;
- $\log\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\log(a)$.

Limites de la fonction log

On a : $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$.

Résolution d'équations

Pour tous réels strictement positifs a et b, $\log a = \log b \Leftrightarrow a = b$.
Pour tout réel strictement positif x et tout réel a, $\log x = a \Leftrightarrow x = 10^a$.
En particulier, on a : $\log(10^n) =$ car $n\log 10 = n$, car $\log 10 = 1$.

Fonction inverse du logarithme décimal

La fonction inverse du logarithme décimal est la fonction, définie sur ¡, par : $x \mapsto 10^x = e^{x\ln 10}$. Elle est appelée exponentielle de base 10.

Exercice n°1

Exercice n°2

Exercice n°3

Exercice n°4

Histoire des mathématiques : fonctions logarithmes

La naissance des logarithmes et des exponentielles a lieu tout au long du XVII^e siècle.
Cela commence par la création de tables de logarithmes, permettant d'effectuer les calculs astronomiques qui se développent à l'époque. En effet, ce sont des outils qui facilitent les calculs de produits et de quotients. Après de nombreuses recherches effectuées conjointement avec Neper, Briggs présente les tables de calculs du logarithme pour tous les entiers de 1 à 20 000, et de 90 000 à 100 000. Pour construire ces tables, il utilise deux techniques, l'une utilisant les puissances et l'autre utilisant des racines carrées successives.
La découverte des logarithmes s'est ensuite poursuivie lors des tentatives de calcul d'aire sous des hyperboles, notamment sous

l'hyperbole d'équation $xy = 1$, entre les points d'abscisse a et b. Ce calcul d'aire s'appelle aujourd'hui quadrature de l'hyperbole et s'exprime sous la forme $\ln b - \ln a$.
Les fonctions exponentielle et logarithme deviennent des incontournables lors des problèmes liés au calcul différentiel et aux intégrales, notamment avec les recherches de Leibniz. En effet, celui-ci montre le lien entre les problèmes de quadratures et le problème inverse des tangentes, qui sont une utilisation très importante des logarithmes.
À la fin du XVIIe siècle, une fois que les techniques du calcul intégral sont bien établies, les logarithmes ont permis d'intégrer des fonctions rationnelles (après les avoir décomposées en éléments simples), ce qui a conduit à la dernière découverte : celle du logarithme d'un nombre complexe.