

Fiche

L'objectif principal est de découvrir la notion de continuité et de l'utiliser pour résoudre des équations.

La notion de continuité permet d'énoncer le théorème des valeurs intermédiaires. Ce dernier sert notamment à déterminer le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$ (où $k \in \mathbb{R}$ et f est une fonction continue), ainsi qu'à en donner une valeur approchée ou un encadrement. Ceci est surtout intéressant lorsque l'on ne sait pas résoudre algébriquement une telle équation.

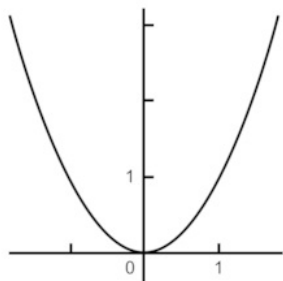
I. Qu'est-ce qu'une fonction continue ?

Approche graphique

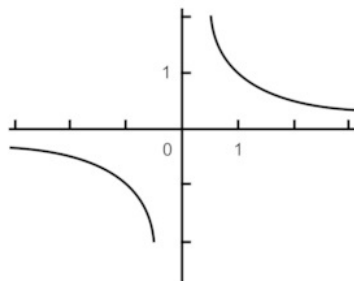
Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que la fonction f est continue sur I lorsque sa courbe représentative se trace « sans lever le crayon »

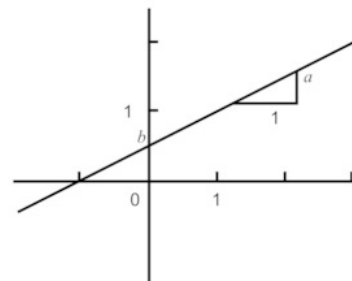
Exemples de fonctions continues :



La fonction carré $x \rightarrow x^2$ est continue sur \mathbb{R}



La fonction inverse $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$ mais pas sur $]-\infty; 0[$



Une fonction affine $x \rightarrow ax + b$ est continue sur \mathbb{R}

Propriétés :

- Les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée) sont continues sur leur ensemble de définition.
- Les fonctions construites à partir des fonctions de référence sont continues sur leur ensemble de définition.
- Les fonctions polynômes sont continues sur \mathbb{R} .
- Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

Exemples : La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 1$ est continue sur \mathbb{R} ,

car c'est une fonction polynôme.

La fonction f définie pour tout réel $x \neq 3$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$,

car c'est une fonction rationnelle dont le dénominateur s'annule pour $x = 3$.

Approche algébrique

Définition : Soient f définie sur un intervalle I , et $a \in I$. On dit que f est continue en a si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Exemple : Soit la fonction g définie sur \mathbb{R}

par :

$$\begin{cases} g(x) = x - 3 & \text{si } x < 0 \\ g(x) = x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

L'image de 0 par la fonction g existe, alors $g(0) = 0 + 1 = 1$.

De plus, d'après la définition de la fonction g on peut calculer les limites à gauche et à droite de $x = 0$.

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$.

Comme les limites ne sont pas les mêmes, on en déduit que la fonction g n'est pas continue en .

II. Quelle est la propriété des valeurs intermédiaires ?

Propriété fondamentale des fonctions continues

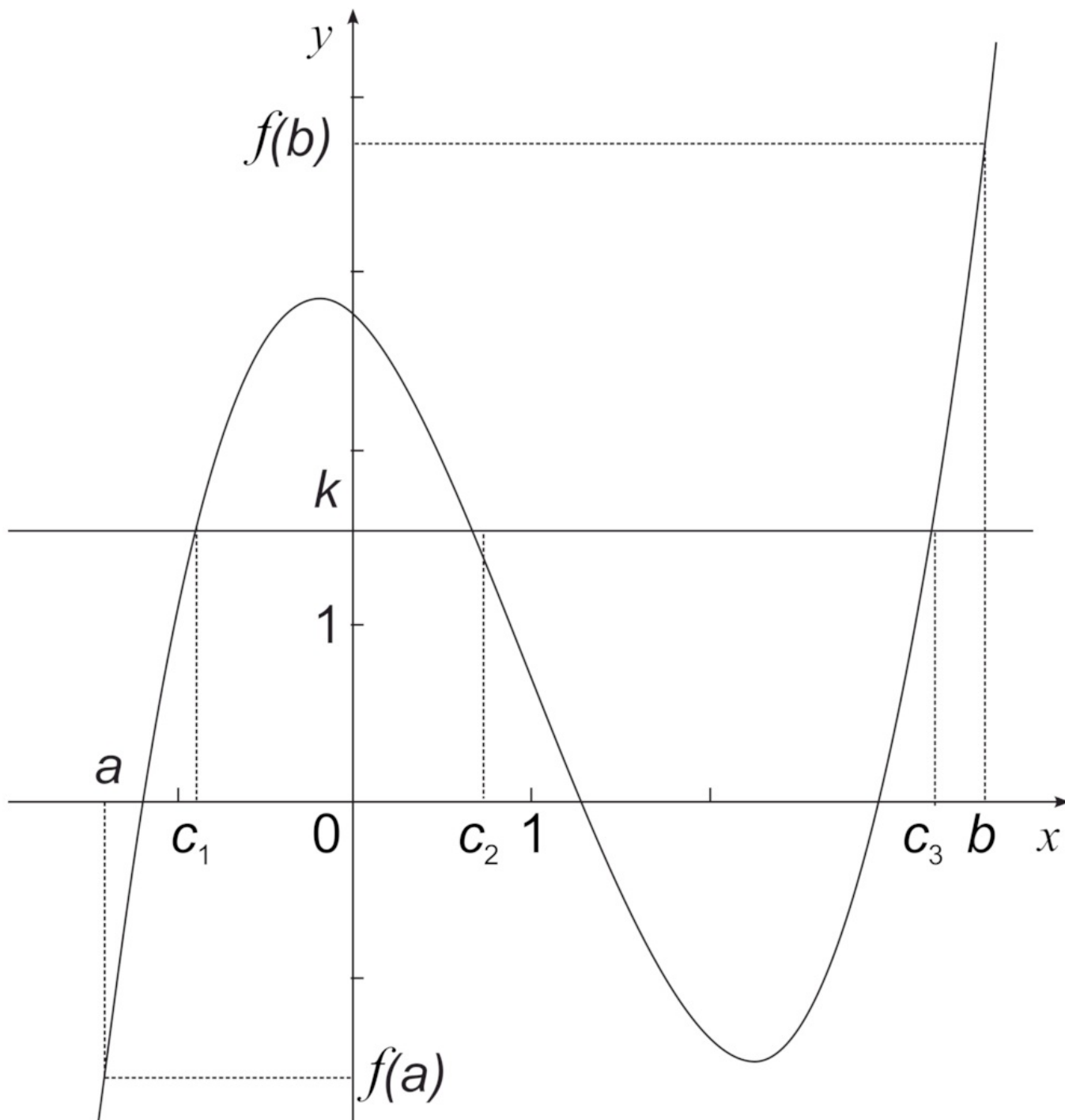
On considère un intervalle I et deux nombres réels a et b appartenant à I .

Soit f une fonction continue sur I .

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Interprétation graphique

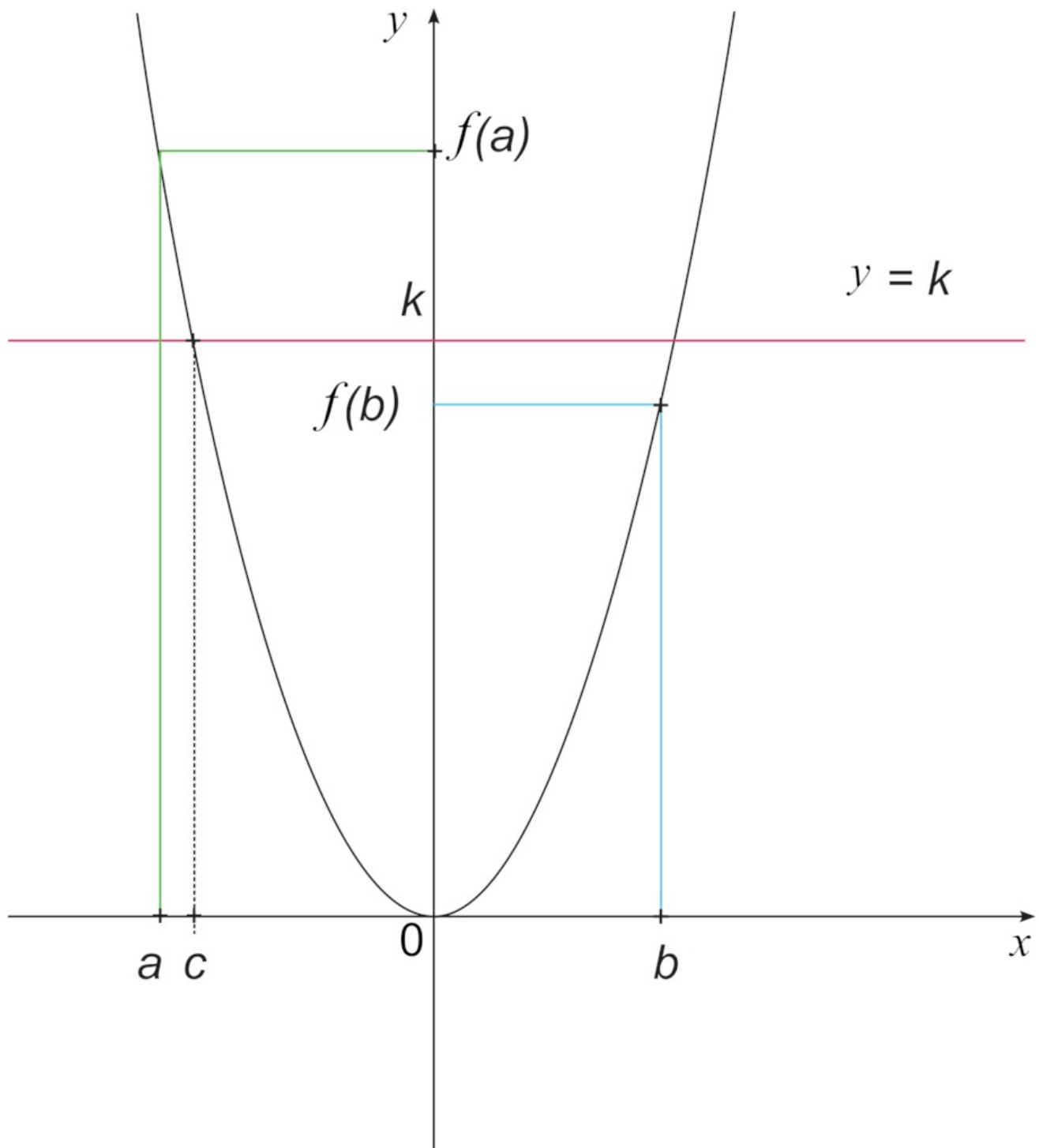
Si la fonction f est continue, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors la droite d'équation $y = k$ coupe au moins une fois la courbe représentative de la fonction f . De plus, ce point d'intersection est un point dont l'abscisse est comprise entre a et b .



Interprétation grâce aux équations

Si la fonction f est continue, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution

comprise entre a et b .

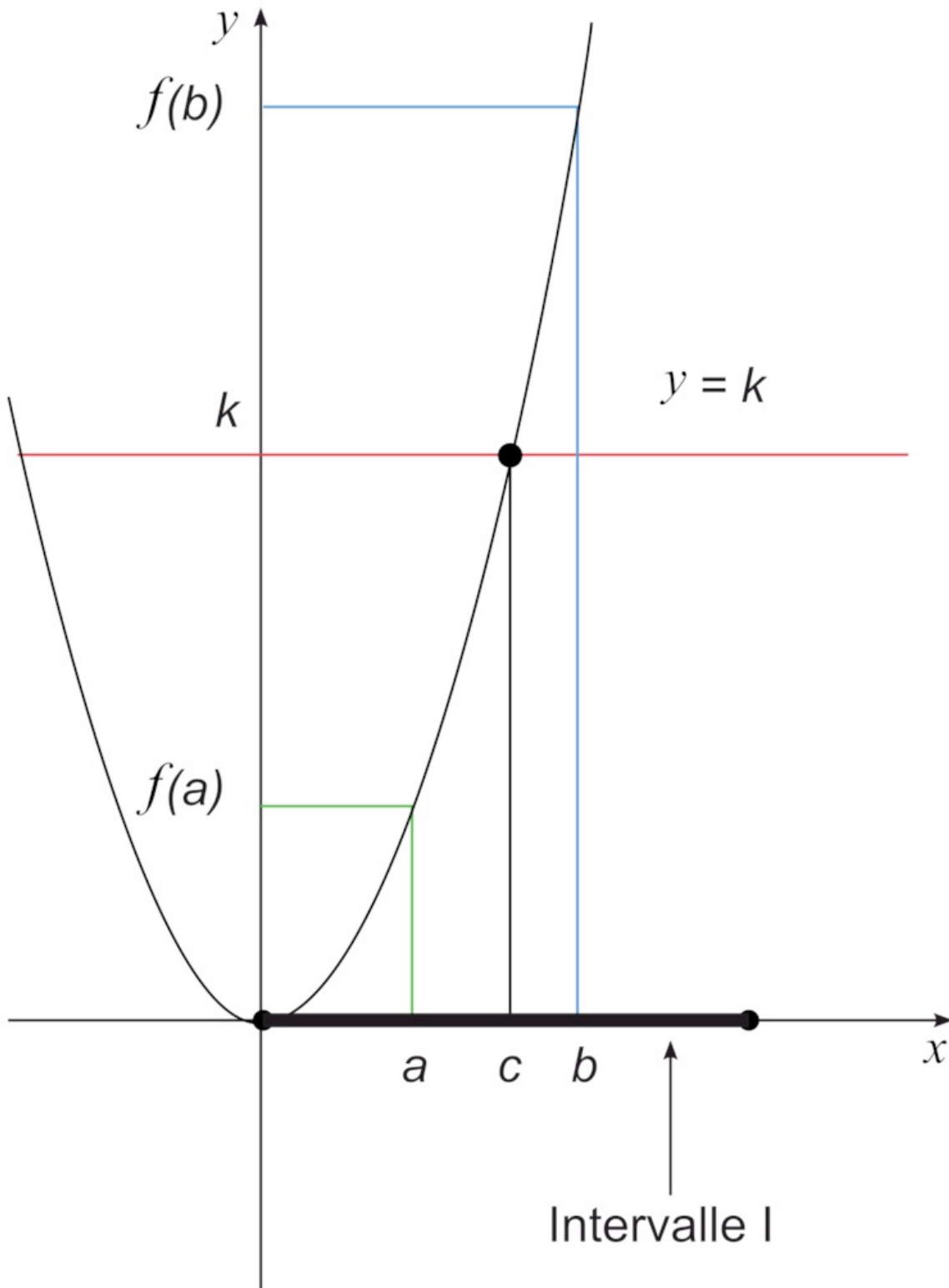


Cas particulier : si la fonction est continue et strictement monotone sur l'intervalle I

On considère un intervalle I et deux nombres réels a et b appartenant à I .

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I .

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique comprise entre a et b .



Suites récurrentes d'ordre 1

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite définie sur \mathbb{N}

telle que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) converge vers un réel l appartenant à l'intervalle I , alors $f(l) = l$.

Exemple : Soit (v_n) une suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = \frac{1}{v_n+1}$ et telle que $v_0 = 2$. On peut montrer rapidement que (v_n) est strictement positive ainsi que strictement décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors, on sait que la suite (v_n) est convergente vers un réel $l > 0$.

De plus, en résolvant l'équation $\frac{1}{l+1} = l$, et en gardant uniquement la racine positive (car $l > 0$, on montre que $l = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$).

Donc la suite (v_n) converge vers le réel $l = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Déterminer une valeur approchée de la (ou des) solution(s) d'une équation

Il existe plusieurs méthodes permettant de déterminer la valeur approchée d'une solution d'une équation : le balayage, la dichotomie, les sécantes, etc.

La méthode de Newton, quant à elle, utilise le principe de la dérivation.

Voici un programme en langage Python qui correspond à cette méthode :

```
def newton(f, df, x0, epsilon) :  
    x=x0  
    y=x - f(x)/df(x)  
    while abs(y-x)>epsilon:  
        x=y  
        y=y - f(y)/df(y)  
    return y
```

Dans ce programme : f est une fonction ; df est la dérivée de la fonction f ; x_0 est le réel initial et ϵ est un paramètre de précision.

Par exemple, si nous entrons en amont du programme ceci :


```
def f(x) :  
    return 0.25*x**2 - x - 1
```

```
def df(x) :  
    return 0.5*x - 1
```


Lorsque l'on exécute le programme et que l'on tape dans la console `newton(f, df, 3,0.001)` alors l'affichage final sera : 4.828427125049864.

 [Exercice n°1](#)

 [Exercice n°2](#)

 [Exercice n°3](#)

 [Exercice n°4](#)

 [Exercice n°5](#)

 [Exercice n°6](#)

En mathématiques, la continuité est une propriété topologique d'une fonction. Tout d'abord, une fonction f est continue si à des variations infinitésimales de la variable x correspondent des variations infinitésimales de la valeur $f(x)$.

La continuité est associée à d'autres notions dont l'origine est le plus souvent géométrique. Dans un plan ou dans l'espace, un point peut se déplacer de manière continue pour s'approcher avec une certaine précision d'un autre point.

La notion de continuité a été définie ultérieurement de manière plus rigoureuse par les mathématiciens.

Le premier exemple connu de fonctions continues concerne des fonctions réelles définies sur un intervalle et dont la représentation graphique peut se tracer sans lever le crayon. Cette première approche donne une idée de la notion : la fonction ne doit pas « sauter ». Cependant, ce n'est pas suffisant pour définir précisément la notion de continuité, d'autant plus que certains graphes de fonctions pourtant continues ne peuvent pas se tracer de cette manière, comme l'escalier de Cantor (défini avec des fractales).

L'étude des fonctions continues se révèle très intéressante, notamment pour les propriétés que possèdent ces fonctions : propriété de convergence, théorème des valeurs intermédiaires, intégrabilité, etc.