

## Fiche

Déterminer les limites éventuelles d'une fonction n'a d'intérêt que lorsque  $x$  tend vers une borne ouverte de l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ . Cette condition étant remplie, cela permet de connaître le comportement de  $f$  pour des valeurs de  $x$  proches de ces bornes ouvertes de  $D_f$ . C'est ainsi que l'on peut mettre en évidence la présence éventuelle d'asymptotes verticales ou horizontales à la courbe représentative de  $f$ .

### I. Opérations sur les limites

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $a$  (où  $a$  est un nombre réel,  $+\infty$  ou  $-\infty$ ).

#### Limite d'une somme en $a$

Si $f$ a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Si $g$ a pour limite	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

#### Limite d'un produit en $a$

Si $f$ a pour limite	l	$l \neq 0$	$l \neq 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Si $g$ a pour limite	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f \times g$ a pour limite	$l \times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

#### Limite de l'inverse en $a$

Si $g$ a pour limite	$l \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$\pm\infty$
Alors $\frac{1}{g}$ a pour limite	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

### II. Comment lever une forme indéterminée ?

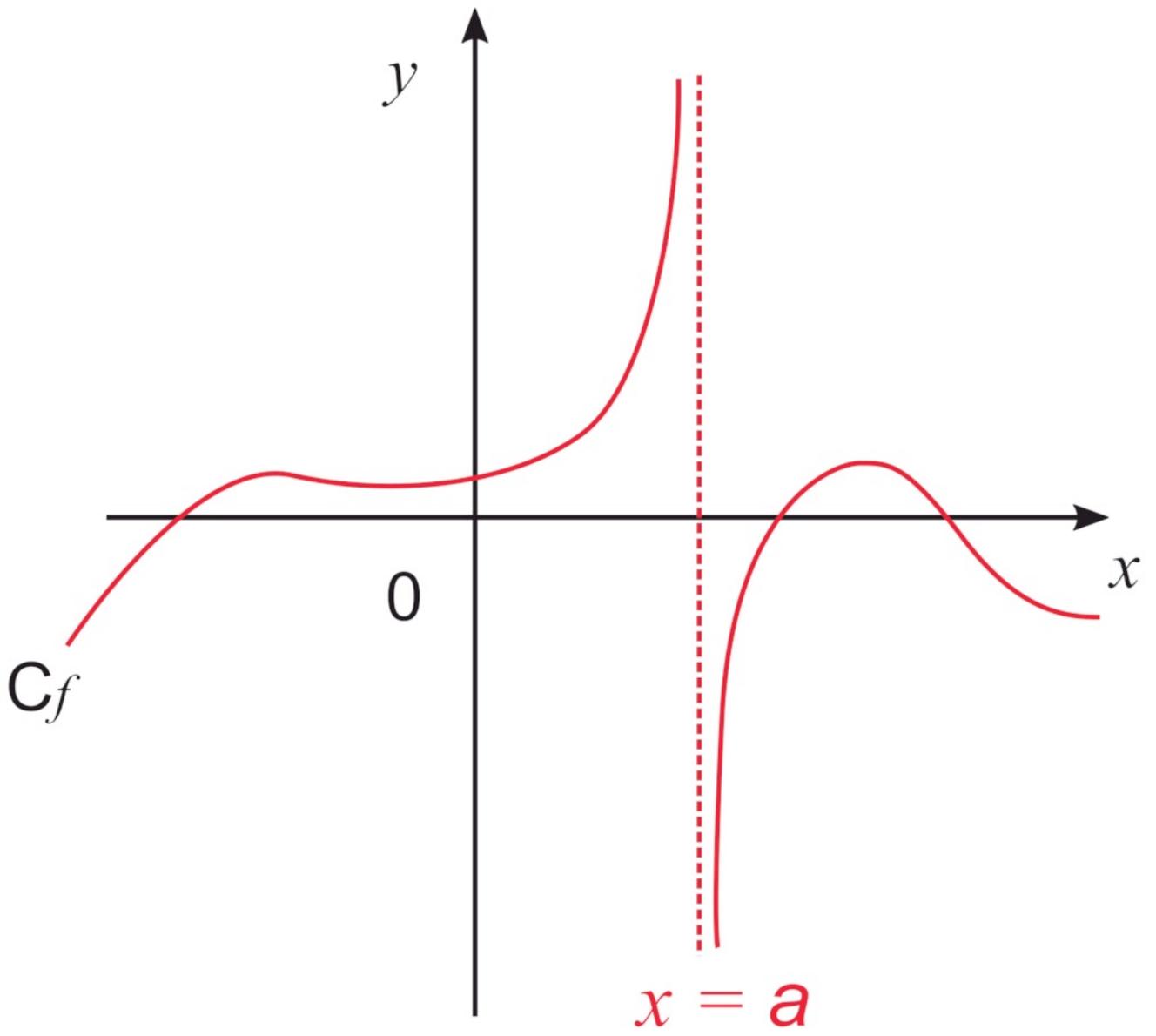
Les « FI » du paragraphe précédent signifient que l'on ne peut pas conclure directement : on est en présence d'une forme indéterminée. Les formes indéterminées sont :  $+\infty - \infty$ ,  $\infty \times 0$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$ .

Pour « lever » cette indétermination, il faut transformer l'écriture de la fonction.

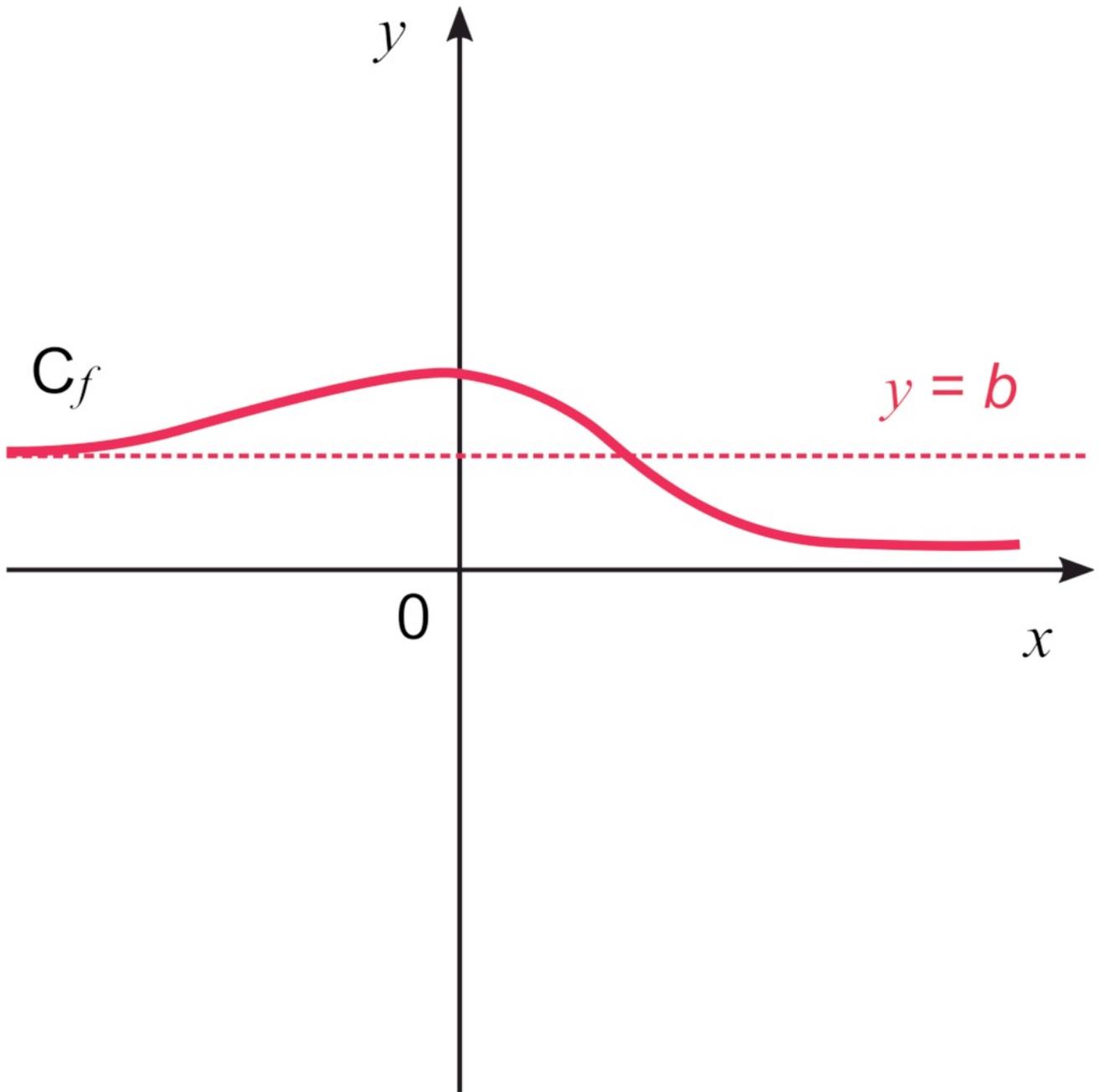
Les deux astuces les plus courantes sont la factorisation de l'expression ou l'utilisation de la forme conjuguée.

### III. Comment détermine-t-on la présence d'asymptotes à la courbe d'une fonction ?

**Asymptote verticale** d'équation  $x = a$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ .



**Asymptote horizontale** d'équation  $y = b$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ .



#### IV. Comment déterminer la limite d'une fonction en utilisant la comparaison ?

On peut utiliser l'un des trois théorèmes de limite par comparaison.

Soient  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies au voisinage de  $\alpha$ , et  $l$  un nombre réel.

**1<sup>er</sup> cas :** Si  $g(x) \leq f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ .

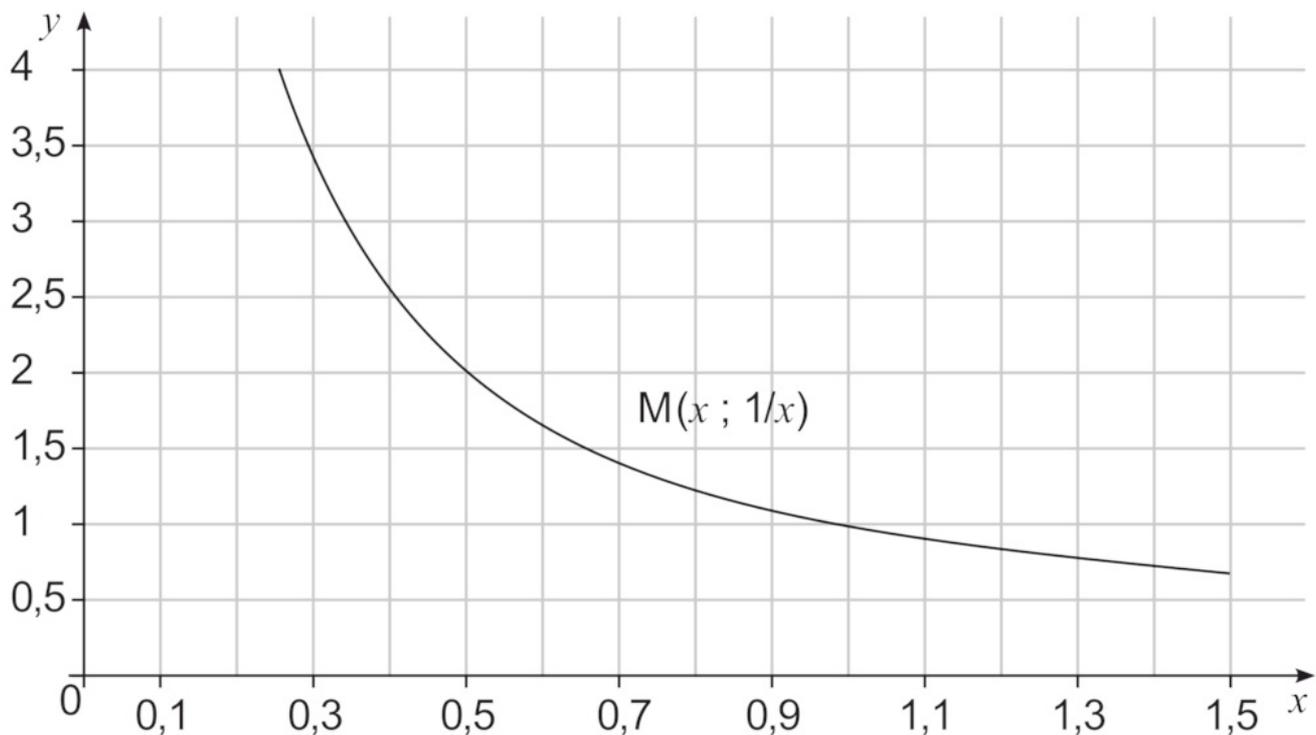
**2<sup>e</sup> cas :** Si  $g(x) \leq f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ .

**3<sup>e</sup> cas : Théorème des « gendarmes »**

Si  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ .

#### V. Quelles sont les limites en 0 et en l'infini de la fonction inverse ?

La **fonction inverse** est définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ , et se représente par une branche d'hyperbole.



L'inéquation  $\frac{1}{x} > 10^n$  a pour solution  $x < 10^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Donc pour  $n$  aussi grand que l'on veut, c'est-à-dire  $10^n$  aussi grand que l'on veut, il est toujours possible de trouver  $x$  proche de 0 tel que  $\frac{1}{x}$  soit supérieur à  $10^n$ .

Lorsque  $x$  tend vers 0, par comparaison avec  $10^n$ ,  $\frac{1}{x}$  tend vers  $+\infty$ .

On a donc :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ .

L'inéquation  $\frac{1}{x} < 10^{-n}$  pour solution  $x > 10^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Donc pour  $n$  aussi grand que l'on veut, c'est-à-dire  $10^{-n}$  aussi petit que l'on veut, il est toujours possible de trouver  $x$  proche de l'infini tel que  $\frac{1}{x}$  soit inférieur à  $10^{-n}$ .

Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , par comparaison avec  $10^{-n}$ ,  $\frac{1}{x}$  tend vers 0.

On a donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

## VI. Quelles sont les limites en l'infini des fonctions carré, cube et racine carrée ?

La **fonction racine carrée** définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x}$  se représente par une demi-parabole.

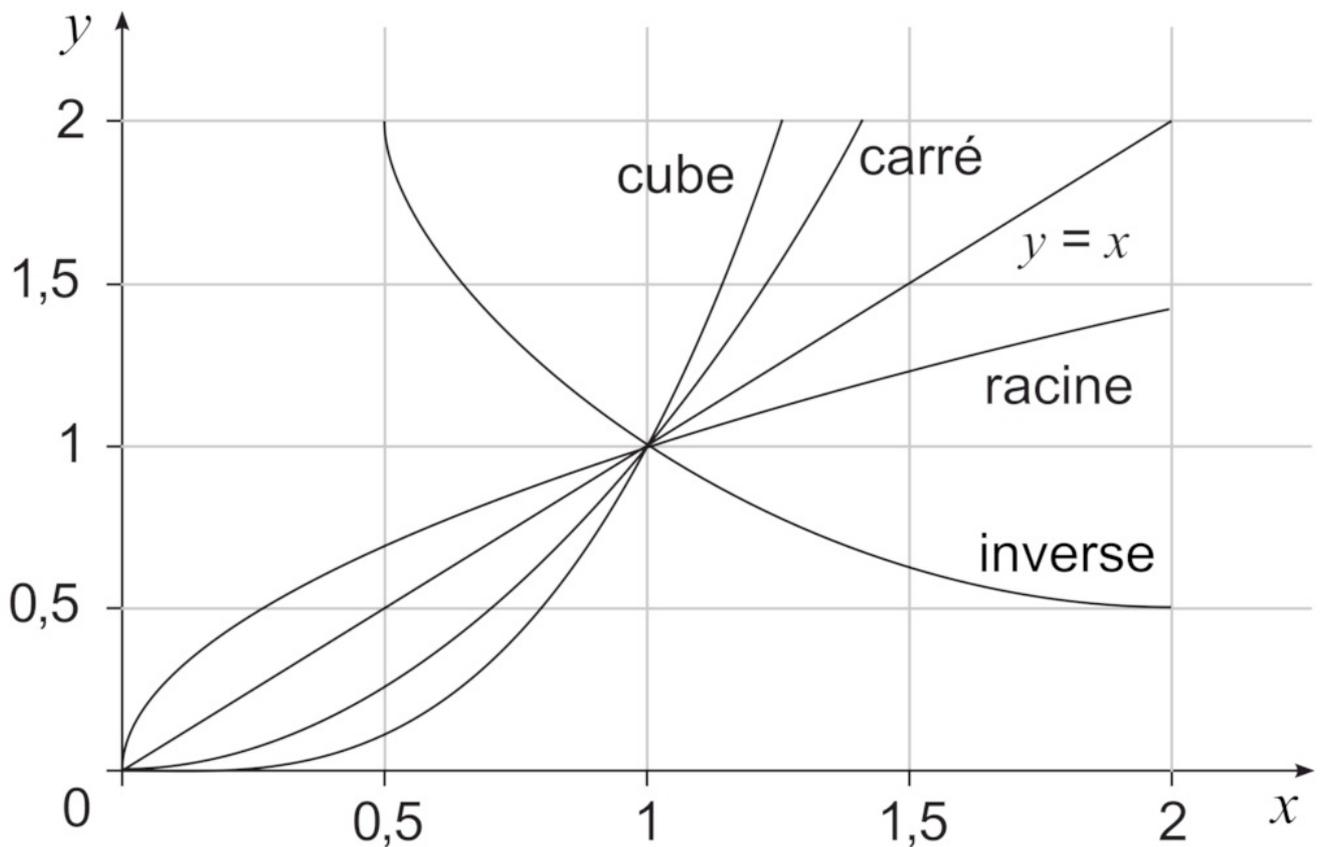
L'inéquation  $\sqrt{x} > 10^n$  a pour solution  $x > 10^{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Donc pour  $n$  aussi grand que l'on veut, c'est-à-dire  $10^n$  aussi grand que l'on veut, il est toujours possible de trouver  $x$  proche de l'infini tel que  $\sqrt{x}$  soit supérieur à  $10^n$ .

Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , par comparaison avec  $10^n$ ,  $\sqrt{x}$  tend vers  $+\infty$ .

On a donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

En observant la représentation graphique sur  $[1; +\infty[$  des fonctions racine carrée  $x \mapsto \sqrt{x}$  carré  $x \mapsto x^2$  et cube  $x \mapsto x^3$ , on obtient :  $\sqrt{x} < x^2 < x^3$ , pour tout  $x \in [1; +\infty[$ .



De plus, comme on a montré que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ , alors, d'après le théorème de comparaison,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ .

### VII. Quelle est la limite en l'infini d'une fonction polynôme ?

**Exemple :** La fonction polynôme  $f$  de degré 3, définie sur  $\mathbb{R}$

par  $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$ .

En factorisant l'expression par  $x^3$  on obtient :  $f(x) = x^3 \left( 2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} \right)$ .

Lorsque  $x$  tend vers l'infini, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} \right) = 2$ . Donc, par produit, on obtient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

La limite de la fonction  $f$ , à l'infini, est donc la limite du terme  $2x^3$ .

**Propriété :** Lorsque  $x$  tend vers l'infini, la limite d'une fonction polynôme est la limite de son terme de plus haut degré.

### VIII. Quelles sont les limites pour les valeurs interdites et en l'infini des fonctions rationnelles ?

**Exemple :** La fonction rationnelle  $f$  définie sur  $]1; +\infty[$ , par  $f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$ .

En factorisant puis en simplifiant l'expression par  $x$  on obtient :  $f(x) = \frac{2 + \frac{5}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$ .

Lorsque  $x$  tend vers l'infini, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 + \frac{5}{x} \right) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right) = 1$ . Donc, par quotient, on obtient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .

La limite de la fonction  $f$ , à l'infini, est donc la limite du quotient  $\frac{2x}{x}$ .

**Propriété :** Lorsque  $x$  tend vers l'infini, la limite d'une fonction rationnelle est la limite du quotient de ses termes de plus haut degré. La fonction  $f$  n'est pas définie pour  $x = 1$ .

Lorsque  $x$  tend vers  $1^+$ , on a  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 5) = 7$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0^+$ . Donc, par quotient, on obtient :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ .

**Propriété :** Lorsque  $x$  tend vers une valeur interdite de l'ensemble de définition, on calcule les limites du numérateur et du dénominateur, et on applique «  $\frac{1}{0} = \pm\infty$  ».

### IX. Quelle est la limite en l'infini de la fonction exponentielle ?

On sait que, pour tout réel  $x$ , on a :  $x < e^x$ .

De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ .

Donc, en utilisant le théorème de comparaison, on obtient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

## Histoire des mathématiques : limites

La limite est une notion qui a été au centre de l'Analyse, mais qui n'a été formalisée que très tard.

Zénon d'Élée (450 av. J.-C.) est le philosophe dont les paradoxes contiennent les prémices du concept de limite, et de façon sous-jacente, du concept d'indivisible, c'est-à-dire de particule infiniment petite, provenant de la célèbre théorie atomistique de Démocrite. L'indivisible est un concept historiquement très important. Il se trouve pourtant discrédité lors de la formalisation des mathématiques, et ne sera réhabilité qu'au  $xx^e$  siècle.

Archimède (vers 250 av. J.-C.) présente une première méthode de la quadrature de la parabole, qui peut s'interpréter en termes de limite, mais cette conception « dynamique » lui manque. Sa seconde méthode met en jeu les indivisibles. Il admet qu'elle manque de rigueur mais insiste sur le fait qu'elle permet la découverte.

Les mathématiciens médiévaux, de la Renaissance et de l'âge classique, acceptent peu à peu les indivisibles. Ils sont favorables à l'invention d'un nouveau champ mathématique, mais leurs raisonnements perdent en logique et en précision.

De nombreux mathématiciens, comme Bl. Pascal, savent traduire le langage des infiniment petits par des termes très proches de notre conception actuelle de la limite. À l'inverse, Newton rejette les indivisibles et essaie de défendre, avec confusion, la notion de limite.

Il a fallu que la rigueur devienne indispensable au progrès, alors que les problèmes qui se posaient étaient de plus en plus subtils et difficiles, pour que Gauss, et surtout Cauchy, commencent à chercher cette notion avec précision.

C'est finalement Karl Weierstrass qui donne notre définition actuelle de la limite.

 [Exercice n°1](#)

 [Exercice n°2](#)

 [Exercice n°3](#)

 [Exercice n°4](#)

 [Exercice n°5](#)