Fiche

Un couple de lapins nés le premier janvier donne naissance à un autre couple de lapins, chaque mois, dès qu'il a atteint l'âge de deux mois. Les nouveaux couples suivent la même loi de reproduction. Combien y aura-t-il de couples de lapins le premier janvier de l'année suivante, en supposant qu'aucun couple n'ait disparu ?
Pour résoudre ce problème, le mathématicien italien Fibonacci introduit dès 1202 la notion de suite.
Ainsi, si on note u_n le nombre de couples de lapins au cours du mois (avec $u_1 = 1$), la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. On peut alors exprimer u_n en fonction n de et prévoir le nombre de lapins au bout de quelques mois.

I. Quand utiliser un raisonnement par récurrence et comment le rédiger ?

On peut utiliser un **raisonnement par récurrence** chaque fois qu'une propriété à démontrer dépend d'un entier naturel n, surtout lorsqu'il semble y avoir un lien simple entre ce qui se passe au rang n et ce qui se passe au rang $n+1$.
Un raisonnement par récurrence se rédige en quatre étapes :

- on commence par énoncer la propriété à démontrer, en précisant pour quels entiers naturels cette propriété est définie ;
- **initialisation** : on vérifie que la propriété est vraie au rang initial (qui est souvent 0 ou 1) ;
- **hérédité** : on prouve le caractère héréditaire de la propriété. On suppose que la propriété est vraie pour un entier n arbitrairement fixé et on démontre que la propriété est encore vraie au rang $n + 1$;
- on conclut en invoquant le principe de récurrence.

II. Que faut-il savoir sur les suites géométriques ?

Une suite est géométrique quand on passe d'un terme au suivant en multipliant par le même facteur (la raison, notée q).
D'où la formule de récurrence donnée pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n \times q$.
Le terme général d'une suite géométrique est : $u_n = u_0 \times q^n$.
Enfin la somme des $(n + 1)$ premiers termes d'une suite géométrique $(u_0 + u_1 + ... + u_n)$ de raison q différente de 1 est égale à :
$u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
Pour tout réel $q \neq 1$, on a : $1 + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

III. Que faut-il savoir sur les suites arithmétiques ?

Une suite est arithmétique quand on passe d'un terme au suivant en ajoutant un même nombre (la raison, notée r).
D'où la formule de récurrence donnée pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le terme général d'une suite arithmétique est : $u_n = u_0 + nr$.
Cas particulier : pour tout réel n, on a : $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on doit calculer $u_{n+1} - u_n$ et il faut que le résultat obtenu soit un nombre réel indépendant de n.

IV. Comment calculer la limite de q^n lorsque $q > 0$?

Trois cas sont possibles :

- premier cas : si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$;
- deuxième cas : si $q = 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$;
- troisième cas : si $q > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

V. Comment déterminer la limite d'une suite ?

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$. La limite de la suite (u_n) dépend de son premier terme u_0 non nul et de sa raison q.

- Pour tout réel u_0, si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et on dit que (u_n) converge.
- Si $u_0 > 0$ et si $q > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et on dit que (u_n) diverge.
- Si $u_0 >$ et si $q < -1$, alors la suite n'a pas de limite.
- Si $u_0 < 0$ et si $q > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et on dit que (u_n) diverge.
- Si $u_0 < 0$ et si $q < -1$, alors la suite n'a pas de limite.

Pour étudier la limite d'une suite, on peut exprimer le terme général de la suite en fonction de n et déterminer la limite de ce terme en faisant tendre n vers l'infini.
On peut aussi utiliser les théorèmes de limite par comparaison :

- 1er cas : Si $u_n \leqslant v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

- 2e cas : Si $u_n \leqslant v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

- 3e cas (Théorème des gendarmes) : Si $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = L$, alors $\lim_{n\to+\infty} w_n = L$.

Enfin, on sait que :

- Toute suite croissante majorée est convergente.

- Toute suite décroissante minorée est convergente.

- Une suite est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

VI. Comment calculer la limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique ?

Exemple : Déterminer la limite de $S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
1re étape : On voit la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.
On sait que : $S = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
Donc $S = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
2e étape : Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.
3e étape : Donc $\lim_{n\to+\infty} S = 2 - \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$.
Propriété :
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et raison q telle que $0 < q < 1$.
Soit S la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite (u_n). Alors $\lim_{n\to+\infty} S = \frac{u_0}{1-q}$.

VII. Qu'est-ce qu'une suite arithmético-géométrique ?

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que : u_0 étant donné, on a pour tout entier n : $u_{n+1} = au_n + b$.
Exemple : En 2000, la population d'une ville était de 5 200 habitants.
Chaque année, la population augmente de 2 % mais 150 habitants quittent la ville.
On note u_0 le nombre d'habitants en 2000, et u_n le nombre d'habitants en $2000 + n$.
Démontrer que la suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
On sait qu'une augmentation de 2 % correspond à un coefficient multiplicateur de : $1 + \frac{2}{100} = 1,02$.
On a $u_0 = 5\,200$ et pour tout entier n : $u_{n+1} = 1{,}02u_n - 150$.
La suite (u_n) est donc une suite arithmético-géométrique.
Cas particuliers :

- Si $b = 0$ et $a \neq 0$, alors la suite est une suite géométrique de raison a ;

- Si $a = 1$, alors la suite est une suite arithmétique de raison b.

VIII. Algorithmique

Étant donnée une suite (q^n) avec $0 < q < 1$, on veut élaborer un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel $q^n < a$, où a est un réel positif donné.
Déterminer un seuil revient à déterminer le plus petit entier n tel que $q^n < a$.
La condition d'arrêt revient à continuer à calculer q^n tant que $q^n \geqslant a$.
On a donc l'algorithme :
Entrées
Saisir a (nombre réel strictement positif)

Saisir q (nombre réel strictement compris entre 0 et 1)
Initialisation
n prend la valeur 0
Traitement
Tant que : q^n
$\geqslant$
a
n prend la valeur $n + 1$
Fin de tant que
Sortie
Afficher n

```
def seuil(a, q):
    n = 0
    while q**n >= a :
        n = n+1
    return n
```

Exemple :
Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 0{,}9n$.
(u_n) est strictement décroissante, car $0 < q < 1$ et $u_0 = 0{,}9$.
Pour déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 0{,}01$, on exécute le programme. Dans l'algorithme, on tape seuil (0, 01, 0,9) et on obtient 44.

Histoire des mathématiques : suites numériques

- **Archimède** a défini dans les années 220 av. J.-C. deux suites permettant d'obtenir de très bonnes valeurs approchées de π.
- **Héron d'Alexandrie** au Ier siècle après J.-C. utilise un algorithme de calcul qui fournit une suite de valeurs approchées de plus en plus précises de la racine carrée d'un nombre.
- **Léonard de Pise (Fibonacci)** expose au XIIIe siècle sa célèbre suite.
- **Nicolas Oresme**, mathématicien français du XIVe siècle a étudié les suites arithmétiques et géométriques, et la somme des termes de certaines d'entre elles.
- L'idée de fonction est plus récente (XVIIe siècle). Les mathématiciens ont alors montré qu'une suite est une fonction particulière.
- **Augustin Cauchy**, mathématicien français du XIXe siècle a posé les fondements rigoureux de la théorie des suites.
- La conjecture de **Syracuse** (XXe siècle) montre une suite avec un comportement particulier, non encore démontré à ce jour.
- Les **fractales** sont apparues au XIXe siècle, et le français Benoit Mandelbrot en fait, dans les années 1970, l'objet d'une nouvelle discipline mathématique : la géométrie fractale.

Zoom sur… les limites des suites

Limite d'une somme

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Si $\lim_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Si $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$

Limite d'un produit

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n =$	l	$l \neq 0$	$l \neq 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Si $\lim_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) =$	$l \times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Limite d'un inverse

$\lim_{n\to+\infty} v_n =$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n} =$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Limite d'un quotient

On a : $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$, donc on revient à la règle du produit.

Théorème de limites par comparaison

- Si $u_n \leqslant v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- Si $u_n \leqslant v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Théorème des gendarmes

Si $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = L$ alors $\lim_{n\to+\infty} w_n = L$.

Exercice n°1

Exercice n°2

Exercice n°3

Exercice n°4

Exercice n°5

Exercice n°6