Fiche

Dans tout le chapitre, on munit l'espace du repère $\left(O; i, j, k\right)$.

I. Comment peut-on exprimer la représentation paramétrique d'une droite ?

Soit D une droite de l'espace contenant un point A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et de vecteur directeur u de coordonnées (a, b, c) On peut caractériser cette droite grâce à une **représentation paramétrique**.

Caractérisation de la droite D par un **système d'équations paramétriques :** $\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Exemple 1 :

Soit un cube ABCDEFGH et I milieu de [EF]. $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace. On a I (0,5 ; 0 ; 1) et B (1, 0, 0), donc $\overrightarrow{BI}(-0,5; 0; 1)$. La droite (BI) est donc définie par le système suivant : $\begin{cases} x = 1 - 0,5k \\ y = 0 + 0k \\ z = 0 + 1k \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 :

Soit D la droite définie par : $\begin{cases} x = 1 + 4k \\ y = 2 + 5k \\ z = 3 + 6k \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

La droite D passe par le point A (1, 2, 3) et admet pour vecteur directeur $u(4, 5, 6)$.

II. Comment peut-on exprimer l'équation cartésienne d'un plan ?

On peut déterminer une **équation cartésienne d'un plan** en s'appuyant sur la propriété énoncée ci-dessous :

• Soient a, b, c trois réels non tous nuls, l'ensemble des points M de l'espace de coordonnées (x, y, z) tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal n de coordonnées (a, b, c).

• Réciproquement, tout plan de vecteur normal n de coordonnées (a, b, c) admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Pour déterminer une équation cartésienne d'un plan passant par A et de vecteur normal n, on peut :

• donner la forme générale de l'équation : $ax + by + cz + d = 0$;

• remplacer les coefficients a, b, c par les coordonnées du vecteur n ;

• déterminer ensuite la valeur de d à l'aide des coordonnées du point A.

Exemple 1 : Soit ABCD un tétraèdre et I milieu de [BC]. Soit $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ un repère de l'espace.
1. Vérifier que $n(1, -1, 0)$ est un vecteur normal au plan (AID).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (AID).

1. On a A (0, 0, 0), B (1, 0, 0), C (0, 1, 0) et D (0, 0, 1). Donc I (0,5 ; 0,5 ; 0), $\overrightarrow{AI}(0,5; 0,5; 0)$ et $\overrightarrow{AD}(0, 0, 1)$. On a bien $n \cdot \overrightarrow{AI} = n \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.
2. Grâce au vecteur normal $n(1, -1, 0)$, on peut écrire pour le plan (AID) : $1 \times x + (-1) \times y + 0 \times z + d = 0$.
De plus, I appartient au plan (AID) donc : $1 \times x_I + (-1) \times y_I + 0 \times z_I + d = 0$.
Ainsi, on obtient : $1 \times 0,5 + (-1) \times 0,5 + 0 \times 0 + d = 0$, soit $d = 0$.
Le plan (AID) a donc pour équation cartésienne : $x - y = 0$.
Exemple 2 : Soit le plan P d'équation cartésienne $x + 2y + 3z + 4 = 0$.
Grâce à cette équation, on sait qu'un vecteur normal de P est $n(1, 2, 3)$.
De plus, ce plan passe notamment par le point A (–1, 0, –1), car $-1 + 2 \times 0 + 3 \times (-1) + 4 = 0$.

III. Comment peut-on exprimer les coordonnées du projeté orthogonal ?

Propriété : On munit le plan d'un repère orthonormé.
Soit (AB) une droite du plan et C un point du plan n'appartenant pas à (AB).
Le projeté orthogonal H du point C sur la droite (AB) est l'unique point du plan vérifiant : $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.
Exemple 1 : Soit ABCD un carré et I son centre. On cherche à déterminer les coordonnées de H le projeté orthogonal de I sur la droite (AB).

On utilise le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ qui est orthonormé.

D'après la propriété, on a l'égalité (E) : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Or H appartient à (AB), donc il existe un unique réel a tel que : $\overrightarrow{AH} = a\overrightarrow{AB}$.

Alors : (E) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = a \times \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$. Or $\overrightarrow{AB} \neq 0$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \neq 0$ et (E) $\Leftrightarrow a = \frac{\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$.

Or A (0, 0), B (1, 0) et I (0,5 ; 0,5). Donc $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0,5 \times 1 + 0,5 \times 0 = 0,5$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$.

Alors, on obtient : $a = 0{,}5$, et donc : $\overrightarrow{AH} = 0,5\overrightarrow{AB}$, soit H (0,5 ; 0).

Exemple 2 : Soit ABCDEFGH un cube et I le centre du cube.

On cherche à déterminer les coordonnées de H le projeté orthogonal de I sur le plan (ABC).

On utilise le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, et la base orthonormée $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ du plan (ABC).

D'après la propriété, on a : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Or il existe un unique couple de réels b et c tels que : $\overrightarrow{AH} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AD}$.

Alors : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = (b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AB} = b \times \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + c \times \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$,

et $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AD} = (b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AD} = b \times \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + c \times \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Or A (0, 0, 0), B (1, 0, 0), C (1, 1, 0), D (0, 1, 0) et I (0,5 ; 0,5 ; 0,5).

Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0,5 \times 1 + 0,5 \times 0 + 0,5 \times 0 = 0,5$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 1$ et $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AD} = 0,5$.

On a donc le système suivant à résoudre : $\begin{cases} 0,5 = b \times 1 + c \times 0 \\ 0,5 = b \times 0 + c \times 1 \end{cases}$.

Ainsi, on obtient : $b = c = 0{,}5$.

Donc $\overrightarrow{AH} = 0,5\overrightarrow{AB} + 0,5\overrightarrow{AD}$, soit H (0,5 ; 0,5 ; 0).

IV. Que faut-il retenir sur les systèmes d'équations linéaires ?

Concernant l'intersection de deux plans :

Propriété : Soient $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ les équations cartésiennes respectives de deux plans P et P'. Pour étudier l'intersection de ces deux plans, on résout le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

• Soit ce système n'a pas de solutions, soit il en a une infinité.

• Une **droite de l'espace** peut donc être représentée par un **système de deux équations linéaires** composé des équations cartésiennes de deux plans sécants selon cette droite (Remarque : ce système n'est pas unique).

Exemple : Soit $P : x + 2y + 3z + 4 = 0$ et $Q : 5x + 6y + 7z + 8 = 0$.

On remarque que P et Q sont sécants en une droite D car leurs vecteurs normaux $n(1,2,3)$ et $\overrightarrow{n'}(5,6,7)$ ne sont pas colinéaires.

Déterminons une représentation paramétrique de D.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4 = 0 \\ 5x + 6y + 7z + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 3z - 4 \\ 5(-2y - 3z - 4) + 6y + 7z + 8 = 0 \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} x = -2y - 3z - 4 \\ -10y - 15z - 20 + 6y + 7z + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 3z - 4 \\ -4y - 8z - 12 = 0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x = -2y - 3z - 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(2z + 3) - 3z - 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7z - 10 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$

En posant $z = k$, on obtient finalement le système : $\begin{cases} x = -10 - 7k \\ y = 3 + 2k \\ z = 0 + 1k \end{cases}$ avec k un réel.

Donc D passe par le point H (–10, 3, 0) et admet comme vecteur directeur le vecteur $u(-7, 2, 1)$.

V. Concernant l'intersection de trois plans :

On considère trois plans P, P' et P'' de vecteurs normaux respectifs n, $\overrightarrow{n'}$ et $\overrightarrow{n''}$.

• Point de vue géométrique : P, P' et P'' sont **parallèles** si et seulement si n, $\overrightarrow{n'}$ et $\overrightarrow{n''}$ sont colinéaires.

Deux cas sont alors possibles : soit P, P' et P'' sont confondus et leur intersection est un plan ; soit P, P' et P'' sont strictement parallèles et leur intersection est vide.

Sinon P, P' et P'' sont **sécants** et leur intersection est soit une droite, soit un point.

• Point de vue algébrique :

Soient $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ et $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$, les équations cartésiennes respectives des plans P, P' et P''.

Pour étudier l'intersection de ces trois plans, on résout le système : $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$.

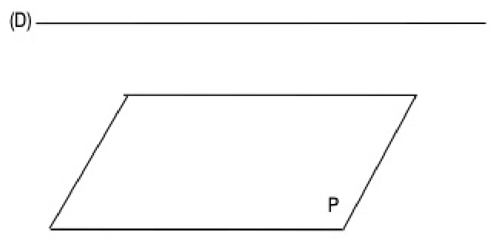
Ce système peut admettre soit aucune solution, soit une unique solution soit une infinité de solutions.

Zoom sur... les intersections de plans et de droites dans l'espace

Récapitulatif des différents cas pour $P \cap D$ (intersection d'une droite et d'un plan) :

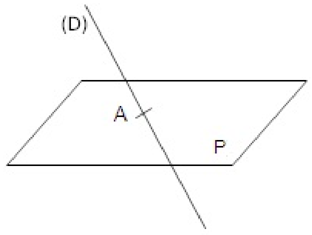
- $P \cap D = \phi$: aucun point commun entre le plan P et la droite D.

Alors : $S = \phi$, le système n'admet aucune solution.



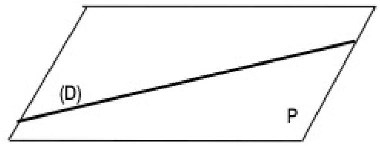
- $P \cap D = \{A\}$: un seul point d'intersection A.

Un seul triplet pour solution : c'est le triplet des coordonnées du point A.



- $P \cap D = D$: l'intersection est la droite D.

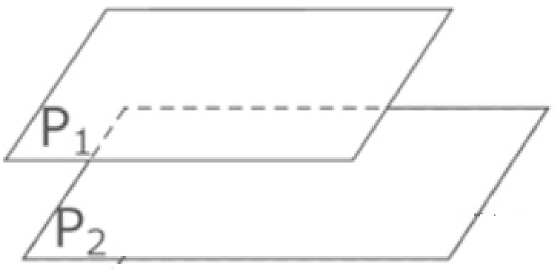
La droite D est incluse dans le plan P.



Récapitulatif des différents cas pour $P_1 \cap P_2$ (intersection de deux plans) :

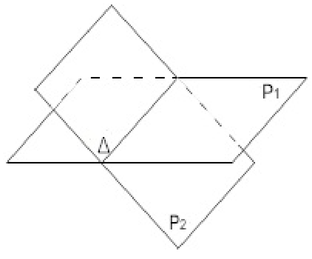
- $P_1 \cap P_2 = \phi$: aucun point commun entre les deux plans.

Alors : $S = \phi$, le système n'admet aucune solution.



- $P_1 \cap P_2 = \Delta$: l'intersection des deux plans P_1 et P_2 est la droite Δ.

Il existe une infinité de solutions : tous les triplets qui sont solutions des deux équations définissant Δ.

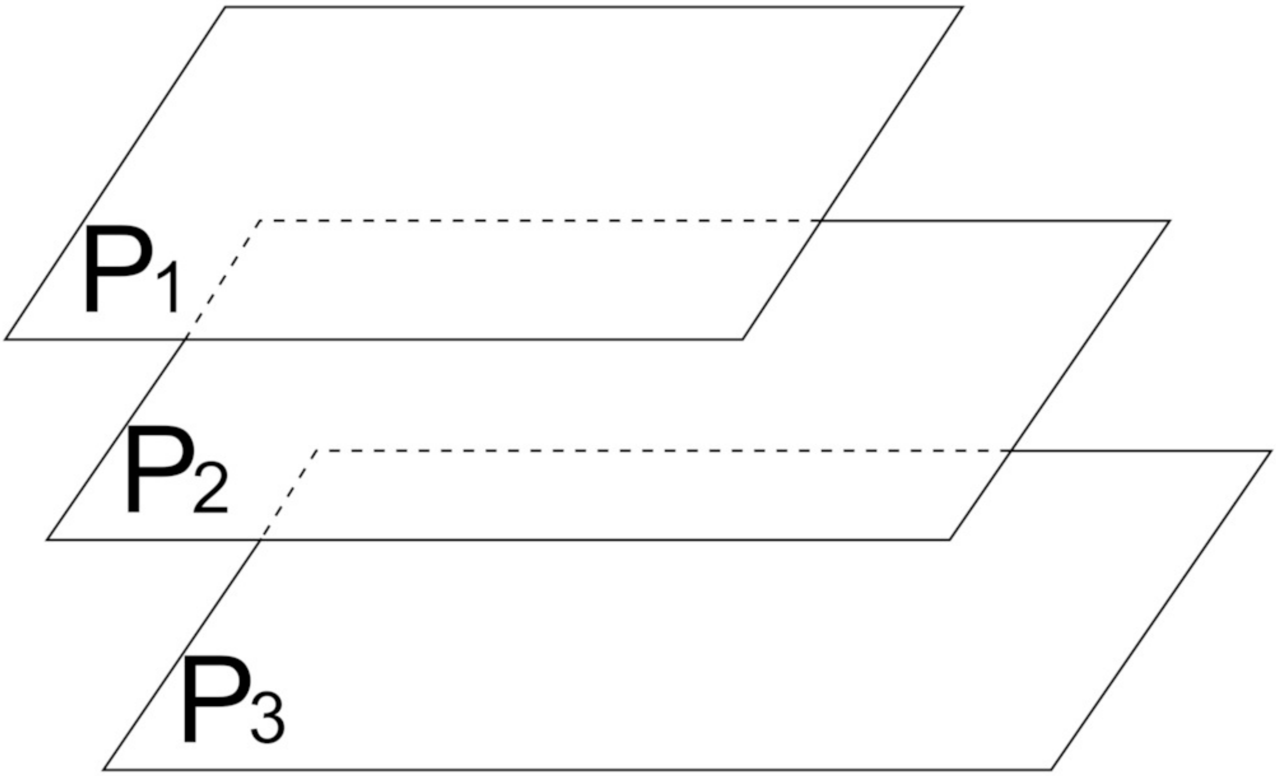


- $P_1 \cap P_2 = P_1$ (ou P_2) : l'intersection des deux plans est l'un des deux plans.

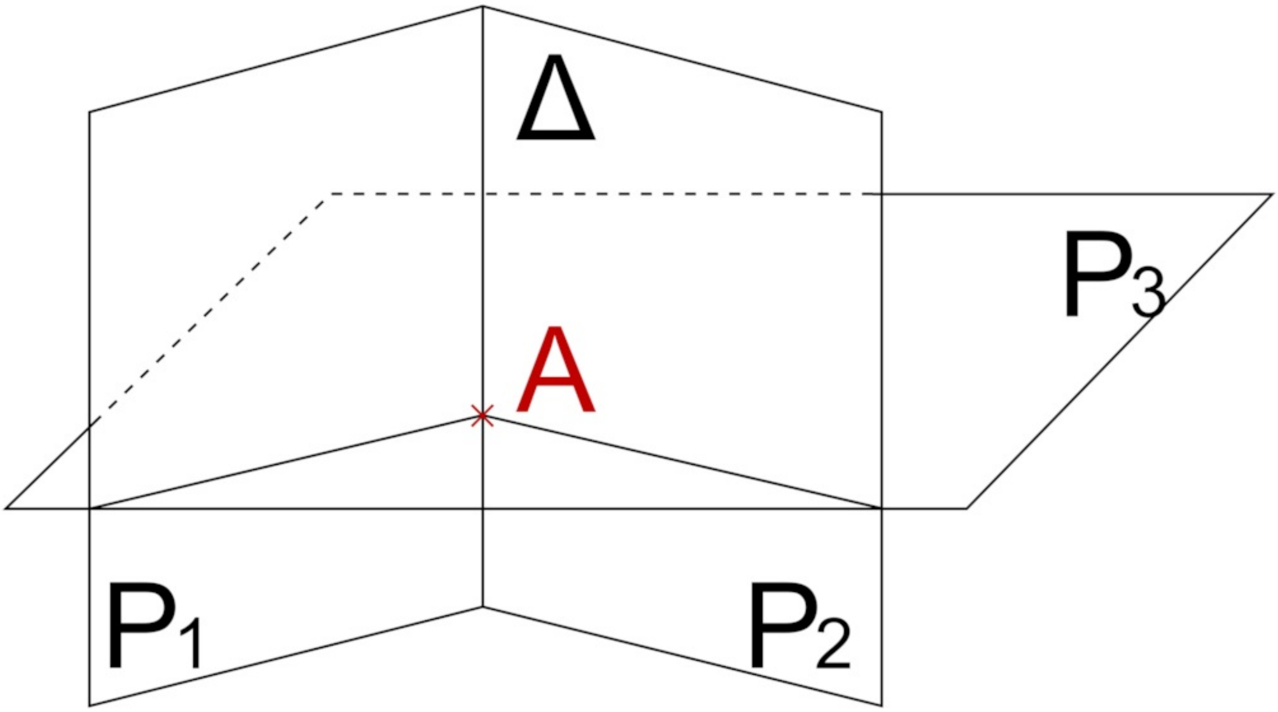
Les deux plans sont confondus.

Récapitulatif des différents cas pour $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ (intersection de trois plans) :

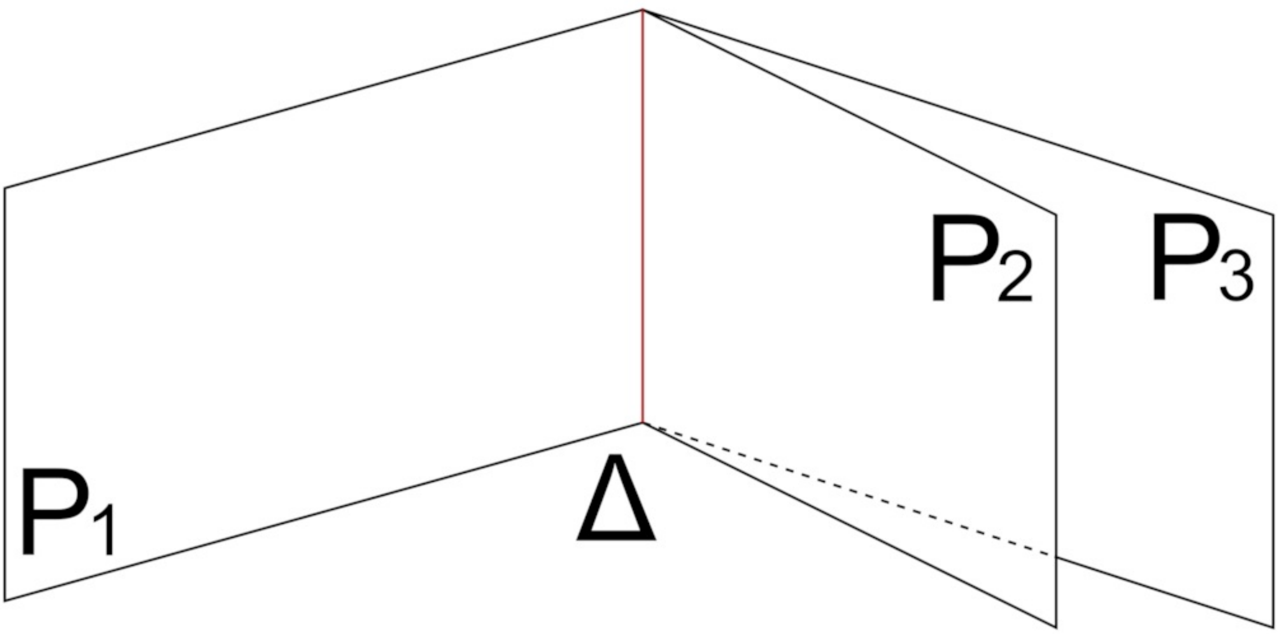
• $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \phi$: aucun point commun aux trois plans.
Alors : S = ϕ, le système n'admet aucune solution.



• $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \{A\}$: un seul point commun A.
Un seul triplet pour solution : c'est le triplet des coordonnées du point A.



• $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \Delta$: l'intersection de P_1, P_2 et P_3 est la droite Δ.
Il existe une infinité de solutions : tous les triplets qui sont solutions des deux équations définissant Δ.



• $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = P_1$ (ou P_2 ou P_3) : l'intersection est l'un des trois plans.
Les trois plans sont confondus.

Exercice n°1

Exercice n°2

Exercice n°3