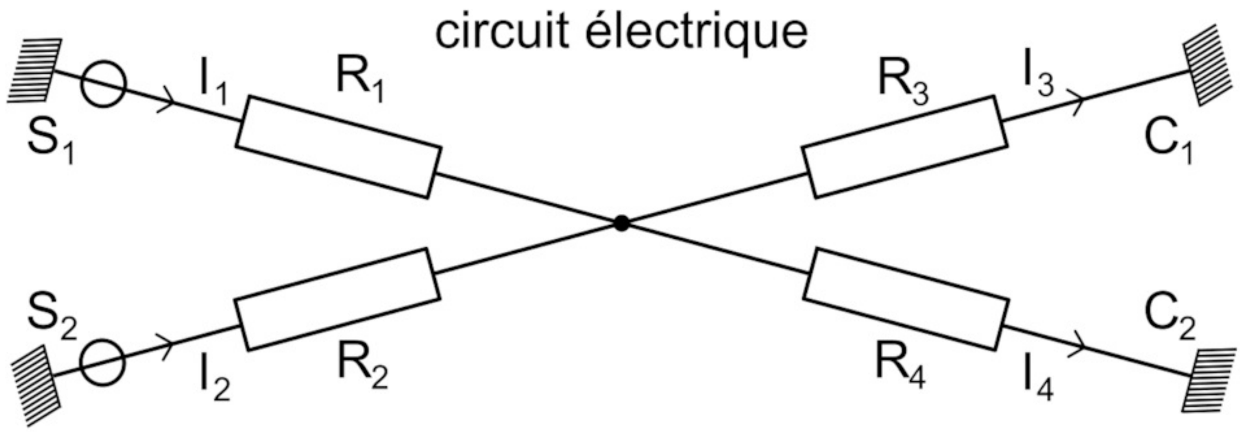
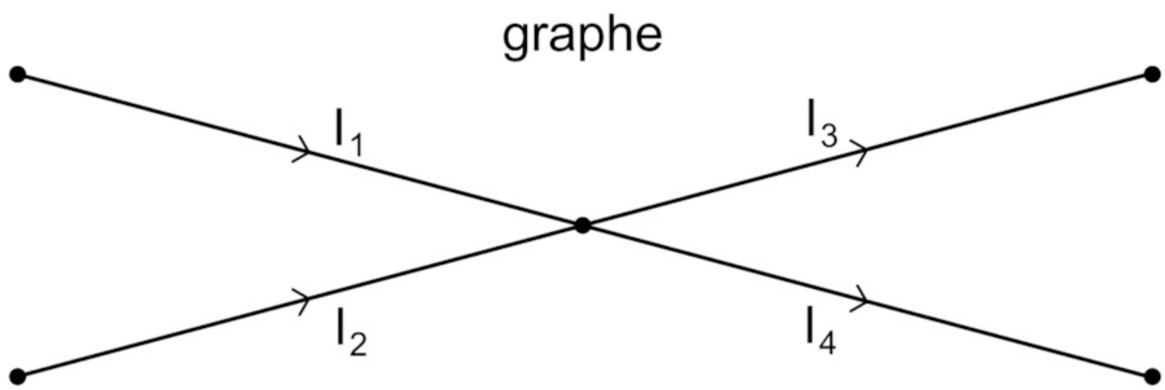
Énoncé

Le sujet

On dispose de deux sources S_1 et S_2 qui produisent du courant continu d'intensité I_1 et I_2. Le courant doit être acheminé vers deux cibles C_1 et C_2 qui attendent des intensités fixées valant respectivement I_3 et I_4. Le réseau comporte un unique nœud.



Le modèle mathématique associé est :



Le problème consiste à déterminer les intensités I_1 et I_2, en ampères, de manière à minimiser la puissance dissipée par effet Joule le long du réseau.

Les contraintes

a) Donner la contrainte au niveau du nœud sur les intensités (aussi appelé loi des nœuds). Comme I_3 et I_4 sont constantes, $I_3 + I_4$ est constant. On pose K = $I_3 + I_4$.

b) En déduire une expression de I_1 et I_2 en fonction de K. Commenter l'expression obtenue.

c) Donner les contraintes sur chacune des intensités I_1 et I_2 par rapport aux valeurs maximales s_1 et s_2.

d) En déduire une inégalité pour I_1 en fonction de K et s_2.

L'expression de la puissance totale dissipée par effet Joule est notée P_{JT}. Elle doit être calculée pour chacun des cas suivants :

Cas n° 1

$R_1 = R_3 = R_4 = 0{,}1\ \Omega$; $R_2 = 0{,}2\ \Omega$; $I_3 = I_4 = 3$ A ; $s_1 = s_2 = 5$ A

a) Déterminer l'expression de P_{JT} en fonction de I_1.

b) On obtient une fonction du second degré en I_1. En traçant cette fonction à la calculatrice, déterminer la valeur du minimum de la courbe.

c) En déduire la valeur de I_2.

Cas n° 2

$R_1 = R_3 = R_4 = 0{,}2\ \Omega$; $R_5 = 0{,}05\ \Omega$; $I_3 = 4$ A ; $I_4 = 2$ A ; $s_1 = 5$ A ; $s_2 = 4$ A.

a) Déterminer l'expression de P_{JT} en fonction de I_1.

b) On obtient une fonction du second degré en I_1. En traçant cette fonction à la calculatrice, déterminer la valeur du minimum de la courbe.

c) En comparant la valeur de I_1 obtenue avec la contrainte précédente, expliquer pourquoi cette optimisation est impossible.

Cas n° 3

$R_1 = 0{,}05\ \Omega$; $R_2 = R_3 = R_4 = 0{,}25\ \Omega$; $I_3 = 4$ A ; $I_4 = 2$ A ; $s_1 = 4{,}5$ A ; $s_2 = 5$ A.

a) Déterminer l'expression de P_{JT} en fonction de I_1.

b) On obtient une fonction du second degré en I_1. En traçant cette fonction à la calculatrice, déterminer la valeur du minimum de la courbe.

c) En comparant la valeur de I_1 obtenue avec la contrainte précédente, expliquer pourquoi cette optimisation est impossible.

La bonne méthode

Les contraintes

a) Faire le bilan des intensités qui arrivent et repartent du nœud.

b) Remplacer par K dans la relation précédente. K est une constante.

c) Les sources S_1 et S_2 ne peuvent délivrer que les intensités maximales respectives s_1 et s_2.

d) Utiliser la relation trouvée en b) pour déterminer une nouvelle relation à partir de celle déterminée en c).

Cas n° 1

a) La puissance dissipée par effet Joule est produite par chacune des résistances. Utiliser les valeurs de l'énoncé et l'expression de la question b) (des contraintes) pour donner une expression numérique P_{JT} de en fonction de I_1.

b) Sur la calculatrice, la variable est x. Il faut donc remplacer I_1 par x.

c) Avec l'expression de la question b) (des contraintes), calculer I_2.

Cas n° 2 et n° 3

a) Il s'agit de la même technique que pour la question précédente, en veillant à utiliser les nouvelles valeurs de l'énoncé.

b) Sur la calculatrice, la variable est x. Il faut donc remplacer I_1 par x.

c) Utiliser les expressions des contraintes sur I_1 pour montrer en quoi l'optimisation est impossible.