Les modèles démographiques

Fiche

La population est en évolution constante. Afin d'ajuster les ressources, il est important de prédire la démographie, c'est-à-dire la dynamique des populations, et la manière dont vont évoluer les moyens qui leur seront nécessaires. Pour prédire l'évolution d'un système, les scientifiques utilisent des modèles mathématiques. Thomas Malthus, économiste anglais du XIXe siècle, est connu pour cette approche mathématique dans le cadre de son étude de l'évolution de la population.
Thomas Malthus publie son *Essai sur le principe de population* en 1798. Il y pointe le déséquilibre entre la croissance de la population et celle des subsistances. Selon Malthus, la population augmente toujours plus vite que la production des ressources nécessaires. Pour résoudre ce problème, il propose de réduire la croissance démographique ou d'augmenter la quantité de vivres, afin de faire correspondre la population à la quantité de denrées alimentaires. Sa théorie a déclenché de nombreuses polémiques. Si les prédictions du modèle sont correctes sur un temps court, elles sont irréalistes sur un temps plus long, notamment en raison de l'insuffisance des ressources disponibles.
D'autres modèles voient ensuite le jour, mais tous ont des limites. Actuellement, des modèles plus élaborés prévoient que nous serons environ 10 milliards d'êtres humains en 2050.

Variation absolue, variation relative

Soit une population dont l'effectif évolue par palier, de la valeur u_n à la période n à l'effectif u_{n+1} à la période $n + 1$. On appelle :

- variation absolue, la différence $u_{n+1} - u_n$;
- variation relative ou taux d'accroissement (ou de variation) entre les états u_n et u_{n+1}, le rapport $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$.

Les suites

Par définition, une suite est une fonction u définie sur l'ensemble
$\mathbb{N}$
des entiers naturels. À chaque entier naturel n, on associe son image $u(n)$ que l'on note aussi u_n. L'ensemble des nombres u_n forme une suite.
On dit que u_n est le terme de rang (ou d'indice) n de la suite (u).

La suite arithmétique et le modèle linéaire

Un modèle mathématique simple est le modèle linéaire. Lorsque, pour tout entier naturel n, la variation absolue entre deux états consécutifs est constante, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n =$ cste, on dit que la suite est arithmétique. La constante obtenue est appelée raison de la suite arithmétique et sera notée r. On peut ainsi écrire :
$u_{n+1} - u_n = r$
Si u_0 est le premier terme de la suite arithmétique, alors :
$u_n = u_0 + n \times r$
Les points de coordonnées $(n ; u_n)$ sont situés sur une droite. Dans la réalité, pour une population dont la variation absolue est presque constante d'un palier à l'autre, on peut ajuster le nuage de points qui la représente par une droite. Le modèle linéaire est inadapté pour représenter l'évolution d'une grandeur dont la variation absolue change fortement d'un palier à l'autre. Il ne permet pas non plus de représenter l'évolution d'une population humaine ou animale. En revanche, l'évolution d'une ressource est souvent bien modélisée par le modèle linéaire.

La suite géométrique et le modèle exponentiel

On considère que tous les termes de la suite sont non nuls. Lorsque pour tout entier naturel n, le rapport entre deux états consécutifs est constant, c'est-à-dire $\frac{u_{n+1}}{u_n} =$ cste, on dit que la suite est géométrique. La constante obtenue est appelée raison de la suite géométrique et sera notée q. On peut ainsi écrire :
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$
Si u_0 est le premier terme de la suite géométrique, alors :
$u_n = u_0 \times q^n$
Une grandeur discrète u varie de manière exponentielle en fonction du palier entier n si sa variation absolue $u_{n+1} - u_n$ est proportionnelle à sa valeur courante u_n.
Dans ce cas, sa variation relative (ou taux de variation) est constante, et la suite de terme général u_n est géométrique, c'est-à-dire que $u_{n+1} - u_n = k \times u_n$, où k est une constante réelle.
Dans la réalité, pour une population dont le taux de variation est presque constant d'un palier à l'autre, on peut ajuster le nuage de points par un modèle exponentiel.

Le modèle démographique : application du modèle de Malthus

Chaque modèle démographique doit être mis en œuvre à partir de trois étapes. Il faut :

• identifier le type de modèle le mieux adapté pour traduire la réalité (linéaire, exponentiel.) ;

• déterminer les paramètres du modèle (le premier terme, la raison...) ;

• comparer le modèle et les observations, et donner éventuellement un domaine de validité du modèle. Parfois, le modèle n'est concordant avec les observations que sur un petit domaine, il faut alors le préciser.

Le modèle démographique de Malthus est un modèle exponentiel d'évolution de l'effectif de la population. Il prévoit que l'effectif de la population décroît vers 0 si le taux de mortalité est supérieur au taux de natalité, et croît vers l'infini si le taux de natalité? est supérieur au taux de mortalité.
« Selon la table d'Euler, si l'on se base sur une mortalité de 1 sur 36 et si naissances et morts sont dans le rapport de 3 à 1, le chiffre de la population doublera en 12 années et 4/5. Ce n'est point là une simple supposition : c'est une réalité qui s'est produite plusieurs fois, et à de courts intervalles. Cependant, pour ne pas être taxés d'exagération, nous nous baserons sur l'accroissement le moins rapide, qui est garanti par la concordance de tous les témoignages. Nous pouvons être certains que lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle double tous les vingt-cinq ans, et croît ainsi de période en période selon une progression géométrique. Il est moins facile de mesurer l'accroissement des produits de la Terre. » (Extrait de Malthus, *Essais sur le principe de population*, 1798.)
La première année, en supposant pour simplifier que la population soit de 360 personnes, le nombre de morts est égal à :
$\frac{1}{36} \times 360 = 10$ morts
Le nombre de naissance est donc :
$10 \times 3 = 30$ naissances
À la fin de la première année, la population sera donc de :
$360 - 10 + 30 = 380$ habitants.
Avec le même raisonnement que précédemment, on obtient le tableau de résultats suivants (en arrondissant les résultats à l'unité).
(Attention : conserver la valeur exacte du nombre de morts pour effectuer les calculs du nombre de naissances et de la population en fin d'année) :

Année	Population en début d'année	Nombre de morts	Nombre de naissances	Population en fin d'année
1	360	10	30	380
2	380	11	32	401
3	401	11	33	423
4	423	12	35	447
5	447	12	37	472
6	472	13	39	498
7	498	14	42	526
8	526	15	44	555
9	555	15	46	586
10	586	16	49	619
11	619	17	52	653
12	653	18	54	689
13	689	19	57	727

Le doublement de la population se fait donc entre la 12^{e} et la 13^{e} année. La 12^{e} année, il y a 689 habitants. Comme il y a 365 jours par an (les années non bissextiles) et que 365 a pour diviseur 5, faisons le même raisonnement que précédemment, mais par tranche de 1/5.
Pour le premier 1/5 de l'année, le nombre de morts est :
$\frac{\frac{1}{36} \times 689}{5} = 4$ morts
Le nombre de naissances est toujours trois fois supérieur au nombre de morts. On obtient ainsi le tableau suivant (en arrondissant les résultats à l'unité) :

Tranche	Population en début de mois	Nombre de morts	Nombre de naissances	Population en fin de mois
1re tranche	689	4	11	697
2^{e} tranche	697	4	12	705
3^{e} tranche	705	4	12	713

4e tranche	713	4	12	721

Au bout de la 4e tranche, c'est-à-dire au bout de 12 ans et 4/5, on a un doublement de la population. Le calcul du rapport u_{n+1}/u_n donne :

Année	Population	u_{n+1}/u_n
1	360	
2	380	1,06
3	401	1,06
4	423	1,06
5	447	1,06
6	472	1,06
7	498	1,06
8	526	1,06
9	555	1,06
10	586	1,06
11	619	1,06
12	653	1,06
13	689	1,06

Les rapports sont égaux. La modélisation peut être effectuée par une suite géométrique de premier terme 360 et de raison 1,06.

Zoom sur…

Les limites du modèle de Malthus

En 1798, l'économiste anglais Thomas Malthus publie *An essay on the principle of population*, dans lequel il émet l'hypothèse que l'accroissement de la population, beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires, conduira son pays à la famine. Il écrit : « Nous pouvons donc tenir pour certain que, lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle va doublant tous les vingt-cinq ans, et croît de période en période selon une progression géométrique. [...] Nous sommes donc en état de prononcer, en partant de l'état actuel de la terre habitée, que les moyens de subsistance, dans les circonstances les plus favorables de l'industrie, ne peuvent jamais augmenter plus rapidement que selon une progression arithmétique. ».

En 1800, la population de l'Angleterre était estimée à 8 millions d'habitants, et l'agriculture anglaise pouvait nourrir 10 millions de personnes. Le modèle de Malthus admet que la population augmente de 2,8 % chaque année et que les progrès de l'agriculture permettent de nourrir 400 000 personnes de plus chaque année. L'évolution de la population est modélisée par la suite géométrique (u_n), où u_n est le nombre d'habitants (en millions) l'année 1800 + n. Le premier terme de la suite est $u_0 = 8$, et la raison est $q = 1{,}028$. L'évolution de l'agriculture est modélisée par une suite arithmétique (v_n), où v_n correspond au nombre d'habitants qui peuvent être nourris (en millions) l'année 1800 + n. Le premier terme de la suite est $v_0 = 10$, et la raison est $r = 0{,}4$. D'où :

$u_n = 8 \times 1{,}028^n$

$v_n = 10 + 0{,}4 \times n$

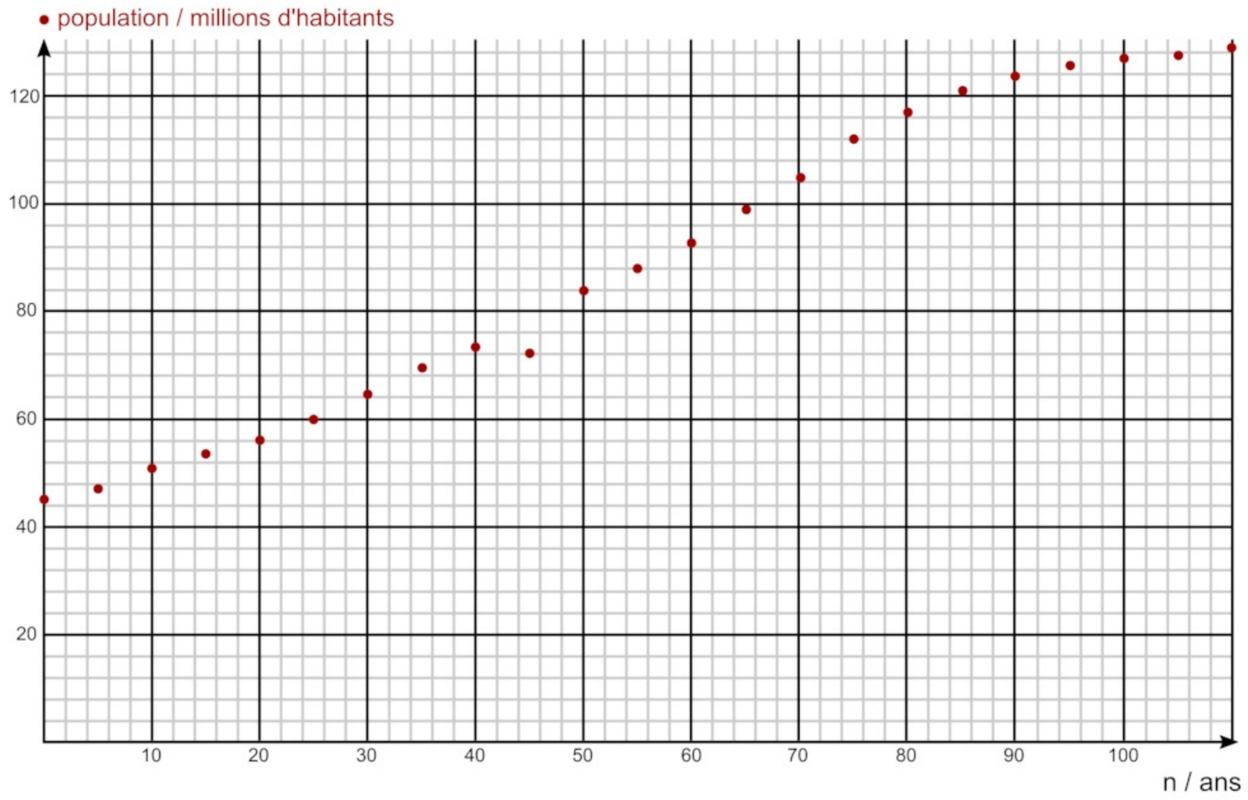

Figure 1. La représentation graphique des deux suites montre une catastrophe en 1846.