Multiples, diviseurs et nombres premiers

Fiche

I. Nombres entiers

Nombres entiers naturels

• Un entier naturel est un nombre entier qui est positif ou nul (égal à 0). L'ensemble des **nombres entiers naturels** est noté
$\mathbb{N}$
.

• **Exemples :** $5 \in \mathbb{N}$; $2019 \in \mathbb{N}$; $-2019 \notin \mathbb{N}$

Nombres entiers relatifs

• Un entier relatif est un nombre entier qui est positif, négatif ou nul.

• L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est noté
$\mathbb{Z}$
.

• **Exemples :** $-2019 \in \mathbb{Z}$; $2019 \in \mathbb{Z}$; $0,5 \notin \mathbb{Z}$

II. Multiples et diviseurs

• **Définition :** Soit a et b deux entiers. On dit que a est un **multiple** de b s'il existe un entier k tel que $a = k\,b$. On dit alors que b est un **diviseur** de a.

• **Exemples :**
2019 est un multiple de 3, car $2019 = k \times 3$ avec $k = 673$.
5 est un diviseur de 70, car $70 = k \times 5$ avec $k = 14$.
20 n'est pas un multiple de 3 car il n'existe pas d'entier k tel que $20 = k \times 3$.

• **Algorithme :** Déterminer si a est un mutiple de b.

```
a=int(input("a= "))
b=int(input("b= "))

if a/b==a//b:
    print(a," est un multiple de ",b,"car ",a,"=",a//b, "x",b,".")
else:
    print(a," n'est pas un multiple de ",b,".")
```

• **Remarque :**
$a//b$ donne le quotient de la division euclidienne de a par b.

• **Propriété :**
La somme de deux multiples d'un entier b est un multiple de b.

• **Démonstration :**
Soit x et y deux multiples de b.
Comme x est un multiple de b, il existe un entier k_1 tel que $x = kb$
Comme y est un multiple de b, il existe un entier m_2 tel que $y = mb$
Alors : $x + y = k\,b + m\,b = (k + m)b$
Or $(k + m)$ est un entier donc $x + y$ est un multiple de b.

Exercice n°1

Exercice n°2

III. Nombres pairs et impairs

• **Définition :**
Un nombre **pair** est un entier multiple de 2. Un nombre **impair** est un nombre qui n'est pas pair.

• **Exemples :**
2018, 2020 et 0 sont des nombres pairs.
2019, 11 et 1789 sont des nombres impairs.

• **Propriétés :**
Un nombre **pair** s'écrit de manière unique sous la forme $2k$, avec k entier. Un nombre **impair** s'écrit de manière unique sous la forme $2k + 1$, avec k entier. Le carré d'un nombre impair est impair.

• **Démonstration :**
Soit a est un nombre impair. Alors il s'écrit sous la forme $a = 2k+1$, avec k entier.
Alors $a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1$, avec $m = 2k^2 + 2k$.
m est un entier car il est la somme de deux entiers
Ainsi a^2 s'écrit sous la forme $a = 2m + 1$ (avec m entier) donc a^2 est impair.

Exercice n°3

IV. Nombres premiers

• **Définition :**
Un entier naturel est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs qui sont 1 et lui-même.

• **Exemples :**
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 sont des nombres premiers.

• **Algorithme :**
Déterminer si un nombre entier est premier.

```python
a=int(input("a= "))
p=True

for i in range(2,a):
    if a/i==a//i:
        p=False

if p==True:
    print(a," est premier")
else:
    print(a,"n'est pas premier")
```

• Remarque :
Le nombre 1 n'est pas premier car il ne possède qu'un seul diviseur : lui-même.

• **Propriété :**
Tout nombre non premier se décompose de manière unique en produit de nombres premiers.

• **Exemple :**
$2019 = 673 \times 3$; $1492 = 2 \times 2 \times 373$

• **Définition :**

On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** lorsque leur seul diviseur commun est 1.
On dit qu'une fraction est **irréductible**, lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exercice n°4

Exercice n°5