Fiche

Démontrer, c'est partir d'une vérité admise pour aboutir, à l'aide d'un raisonnement, à une nouvelle vérité.
On enchaîne des déductions de la forme :
Si *Proposition 1* alors *Proposition 2*, d'où *Proposition 3*, donc *Proposition 4*, par conséquent *Proposition 5*, etc.
Chaque proposition est une condition nécessaire pour que la précédente soit vraie.
Elle n'est pas toujours suffisante pour l'affirmer.
Chaque enchaînement constitue une propriété. Elle doit se justifier par un calcul, un axiome (propriété universellement admise) ou un théorème (propriété préalablement démontrée).
Certaines propriétés sont vraies quelle que soit la valeur de la variable ou le point choisi.
D'autres ne sont vérifiées que pour quelques valeurs ou quelques points.
La logique étudie la formulation des raisonnements. C'est une branche des mathématiques, au même titre que l'algèbre ou la géométrie.

1. Quelle est la différence entre les quantificateurs « Quel que soit » et « Il existe » ?

• L'égalité $(x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$ est vraie quel que soit le nombre réel x. C'est-à-dire qu'en remplaçant x par n'importe quel nombre réel dans le membre de gauche et dans le membre de droite, on obtient le même résultat. Pour le prouver, on développe le membre de gauche.
« Quel que soit » est un quantificateur universel.
L'égalité $x^2 = 2x$ n'est pas vraie pour $x = 4$, mais elle est vraie pour $x = 2$. On peut donc affirmer qu'il existe un nombre réel x tel que l'égalité soit vraie.
« Il existe » est un quantificateur existentiel.
Ces quantificateurs sont souvent sous-entendus dans le langage courant.

Exercice n°1

Exercice n°2

2. Quelle est la différence entre « condition nécessaire » et « condition suffisante » ?

• Dans la déduction « Si le quadrilatère est un rectangle alors il possède deux angles droits », la proposition « il possède deux angles droits » est une condition nécessaire pour la proposition « le quadrilatère est un rectangle ».
Elle n'est pas suffisante car un quadrilatère qui a deux angles droits peut être seulement un trapèze rectangle.
Pour que la condition soit suffisante il faut, par exemple, la proposition « il possède quatre angles droits ».

Exercice n°3

3. Comment distinguer « proposition réciproque » et « contraposée » ?

• La proposition « Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » permet de calculer la mesure d'un côté d'un triangle rectangle connaissant la mesure des deux autres.
Sa réciproque « Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est un triangle rectangle en A » fournit un outil pour prouver qu'un triangle est rectangle.
Sa contraposée « Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors ABC n'est pas un triangle rectangle en A » permet d'établir, par un calcul, qu'un triangle n'est pas rectangle.
L'énoncé réciproque de la propriété « Si P alors Q » est « Si Q alors P ». Sa contraposée est « Si non Q alors non P ».
Lorsque l'énoncé direct et l'énoncé réciproque sont vrais, on dit que les propositions sont équivalentes.

Exercice n°4

Exercice n°5

4. Comment infirmer à l'aide d'un contre-exemple ?

• L'énoncé « Pour entier naturel n on a $(n+2)^2 = n^2+4$ » est faux. On peut le prouver en remplaçant n par 1 : $(1+2)^2 = 3^2 = 9$ et $1^2 + 4 = 5$.
Pour montrer qu'une propriété n'est pas toujours vraie, on montre à l'aide d'un contre-exemple qu'elle est fausse dans l'un des cas.

Exercice n°6

5. Qu'est-ce qu'un raisonnement par l'absurde ?

• La proposition contraire de P « le nombre n est impair » est la proposition non P « le nombre n est pair ». Pour établir qu'un nombre est impair on peut raisonner par l'absurde en montrant qu'il est impossible que n soit divisible par 2.
Plus généralement, pour montrer qu'une proposition P est fausse, on peut prouver que supposer non P vraie conduit à une impossibilité.

Exercice n°7

Exercice n°8

À retenir

• Pour établir qu'une propriété n'est pas vraie quelle que soit la valeur de la variable ou le point choisi, on peut utiliser un contre-exemple, c'est-à-dire montrer qu'elle est fausse pour un élément particulier.

• Dans l'implication « si P alors Q », la proposition Q est une condition nécessaire pour P. Si l'implication réciproque « si Q alors P » est vraie, la proposition Q devient condition suffisante pour P. Les propositions P et Q sont alors équivalentes.

• L'implication « Si P alors Q » a pour contraposée équivalente « si non Q alors non P ».

• Pour montrer par l'absurde qu'une proposition P est fausse, on montre que son contraire non P conduit à une contradiction.