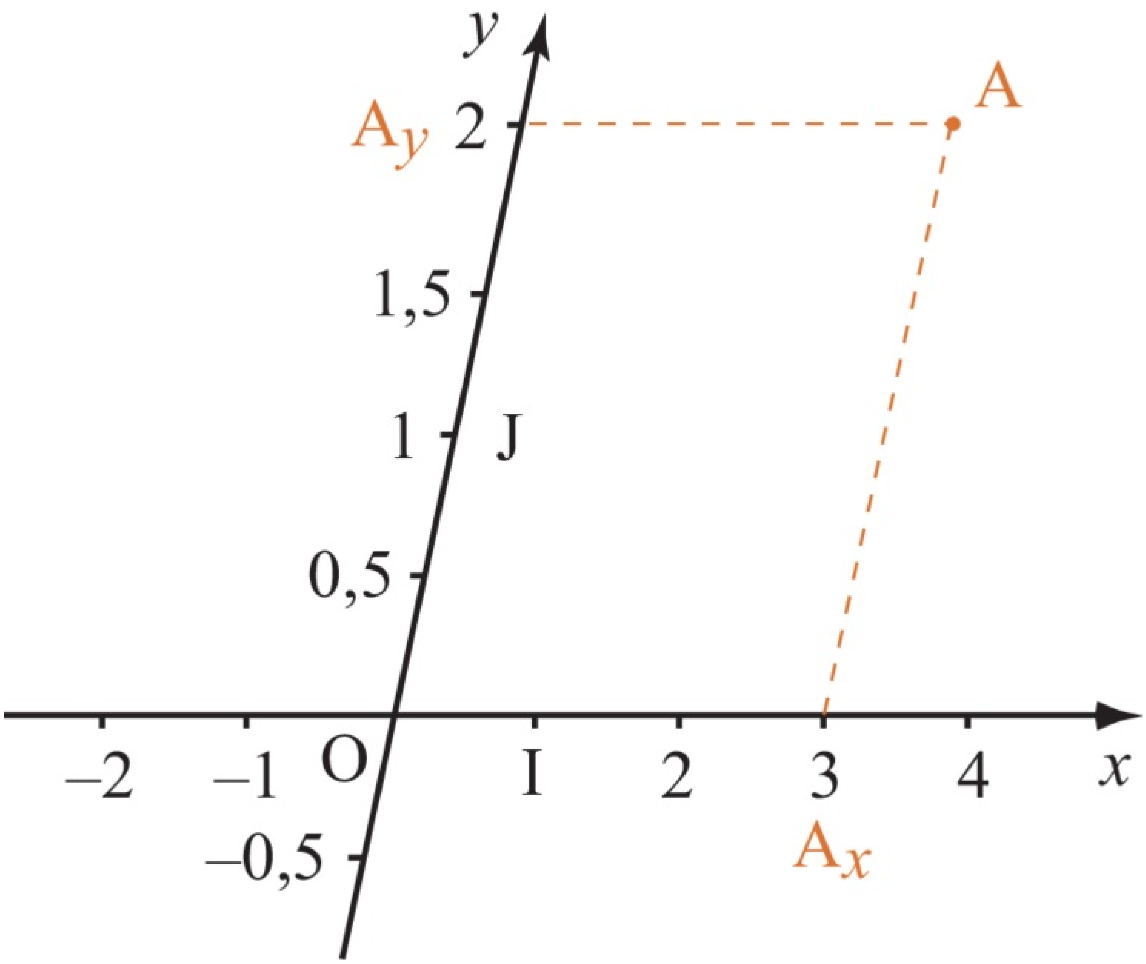
Fiche

En utilisant les nombres réels, on a pu associer à chaque point d'une droite munie d'un repère (O ; I) un nombre appelé son abscisse.
On peut de même associer à chaque point d'un plan muni d'un repère (O ; I, J) deux nombres qui sont les coordonnées du point.
Dans un plan muni d'un repère, on peut calculer les coordonnées d'un vecteur et effectuer différents types de calcul vectoriel pour résoudre des problèmes de géométrie.

1. Comment repérer un point dans un plan ?

• On commence par définir **un repère du plan** : un repère du plan est un triplet de points non alignés (le mot **triplet** signifie que les trois points considérés sont ordonnés).
En général, on appelle le repère (O ; I, J), où O est l'**origine** du repère ; la droite (OI) est l'**axe des abscisses** et la droite (OJ) est l'**axe des ordonnées**.

• Ensuite, à l'aide du repère, on associe à un point un couple unique de nombres réels en traçant des parallèles aux axes passant par le point.



Cherchons par exemple les coordonnées de A sur la figure ci-dessus.
On note A_x le point d'intersection de (OI) et de la parallèle à (OJ) passant par A et A_y le point d'intersection de (OJ) et de la parallèle à (OI) passant par A.
On détermine les coordonnées de A en prenant :
- pour l'abscisse de A, l'abscisse du point A_x sur la droite graduée (OI) d'origine O,
- pour l'ordonnée de A, l'abscisse du point A_y sur la droite graduée (OJ) d'origine O.
Ici, les coordonnées du point A sont (3 ; 2).

Remarques

Si les axes sont perpendiculaires (O ; I, J) est un repère orthogonal.

Si les axes sont perpendiculaires et si de plus OI = OJ, alors (O ; I, J) est un **repère orthonormal**.

Exercice n°1

2. Comment définir un vecteur ? Quand deux vecteurs sont-ils égaux ?

• Soit un plan dans lequel on a défini une unité de longueur. Un **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par trois données :
- sa direction : celle de la droite (AB) ;
- son sens : celui de A vers B ;
- sa longueur : la distance AB.

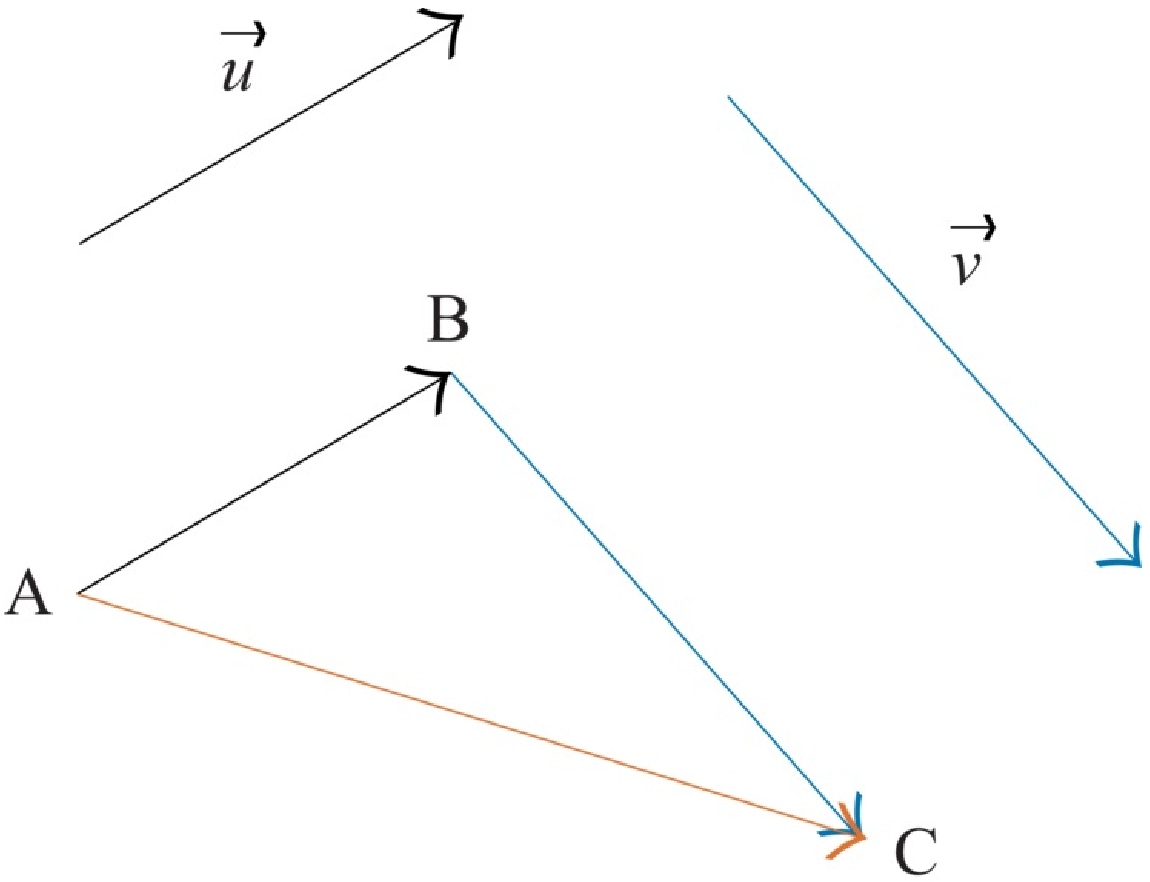
• Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ **est égal** au vecteur $\overrightarrow{CD}$ si ces deux vecteurs ont :
- la même direction, c'est-à-dire si (AB) // (CD) ;
- le même sens, c'est-à-dire si les points B et D sont du même côté de la droite (AC) ;
- la même longueur, c'est-à-dire si AB = CD.

Autrement dit : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si **ABDC est un parallélogramme**.
Ou encore :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si l'image de C par la translation qui transforme A en B est D.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si [AD] et [BC] ont le même milieu ;

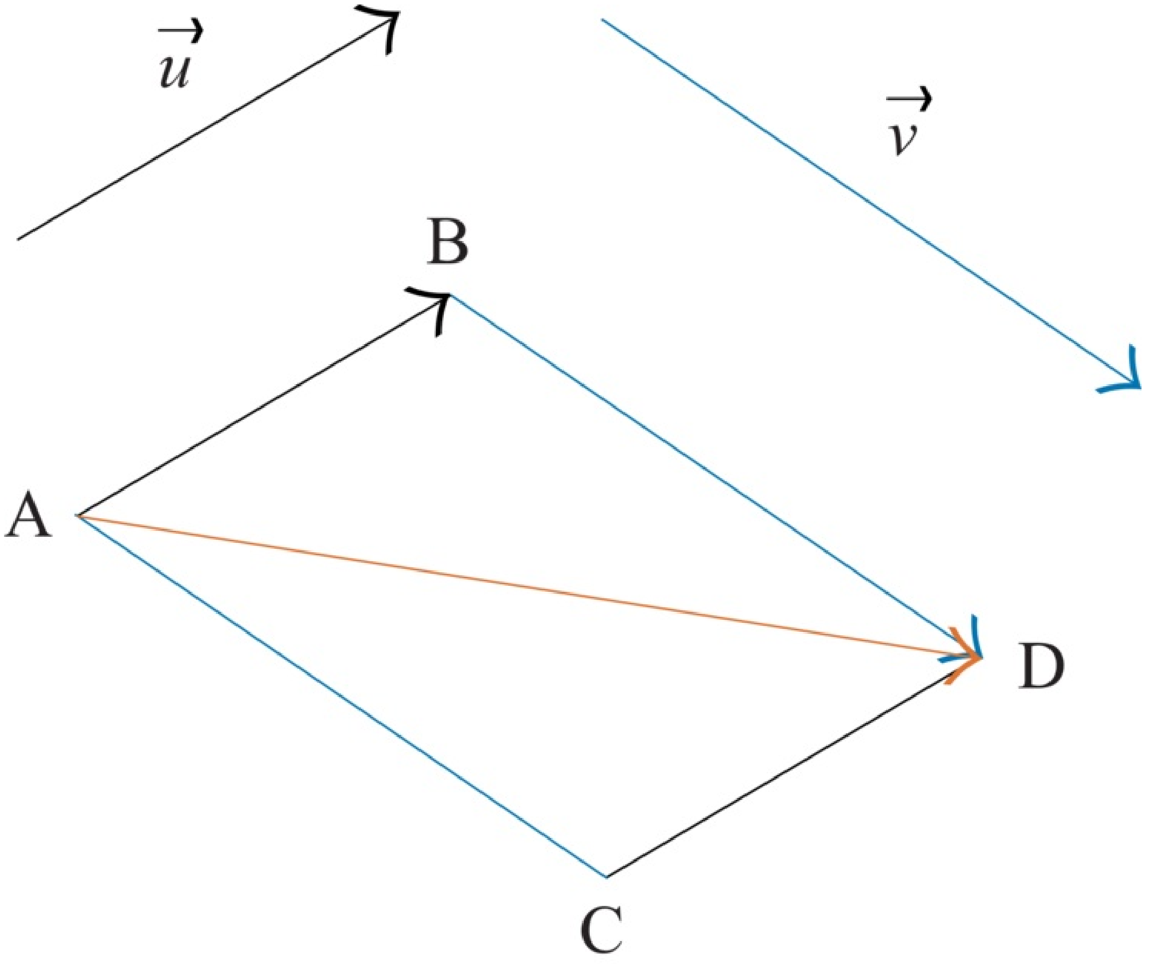
Exercice n°2

3. Quelles opérations peut-on effectuer sur des vecteurs ?

• La **somme de deux vecteurs** est un vecteur que l'on peut construire de deux façons :
- avec la **relation de Chasles** en partant d'un point A : $u + v = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;



- avec la règle du parallélogramme : $u + v = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.



Remarque

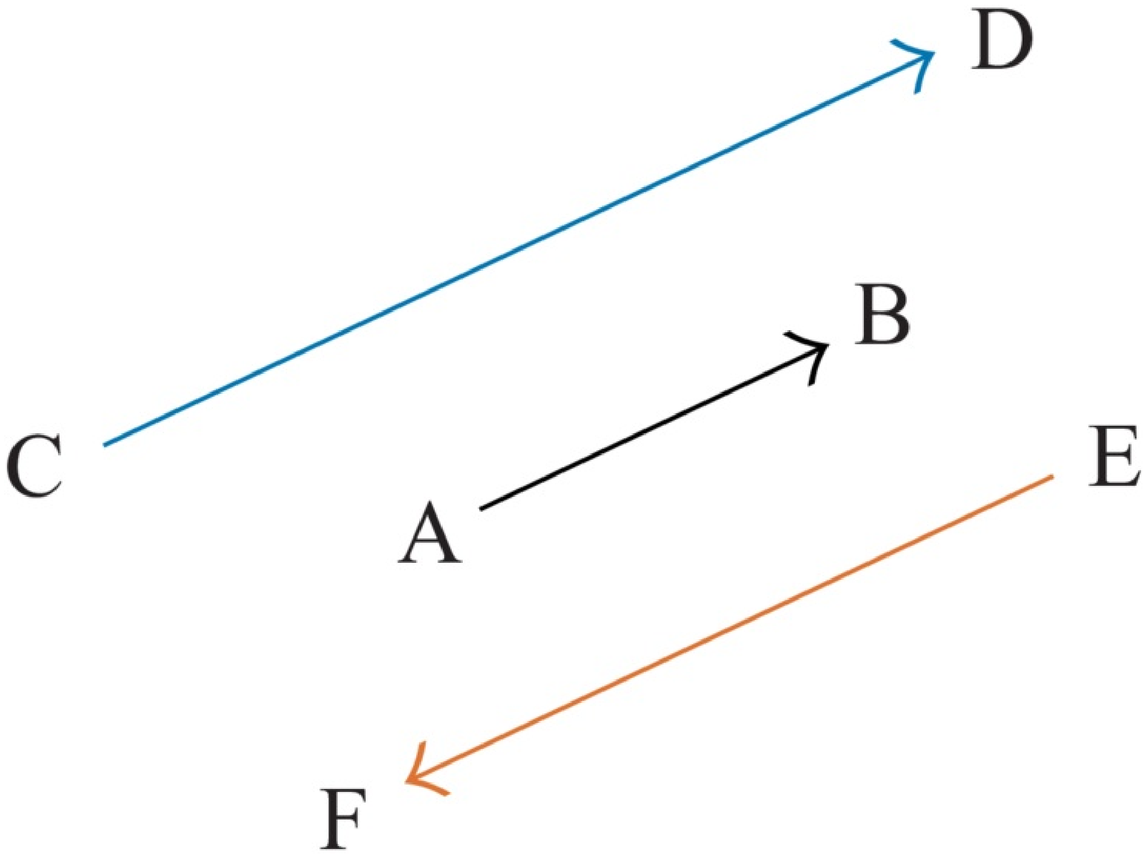
La relation de Chasles sert aussi à décomposer un vecteur en une somme de vecteurs. Si A et B sont deux points donnés, alors, pour tout point C, on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

• On définit **la multiplication d'un vecteur par un réel** de la manière suivante.
Soit u un vecteur non nul et k un nombre réel non nul, le vecteur $v = ku$ est défini ainsi :
- v a la même direction que u ;
- v a le même sens que u si k est positif, le sens contraire si k est négatif.
Si $k = -1$, alors $-1 \times u = -u$, ce qui définit le vecteur opposé à u.

• On appelle **vecteurs colinéaires** des vecteurs qui ont la même direction. Les vecteurs u et v sont colinéaires si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que $v = ku$.
Exemple : sur la figure ci-après, on a $\overrightarrow{CD} = 2,5\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF} = -2\,\overrightarrow{AB}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires

Exercice n°3

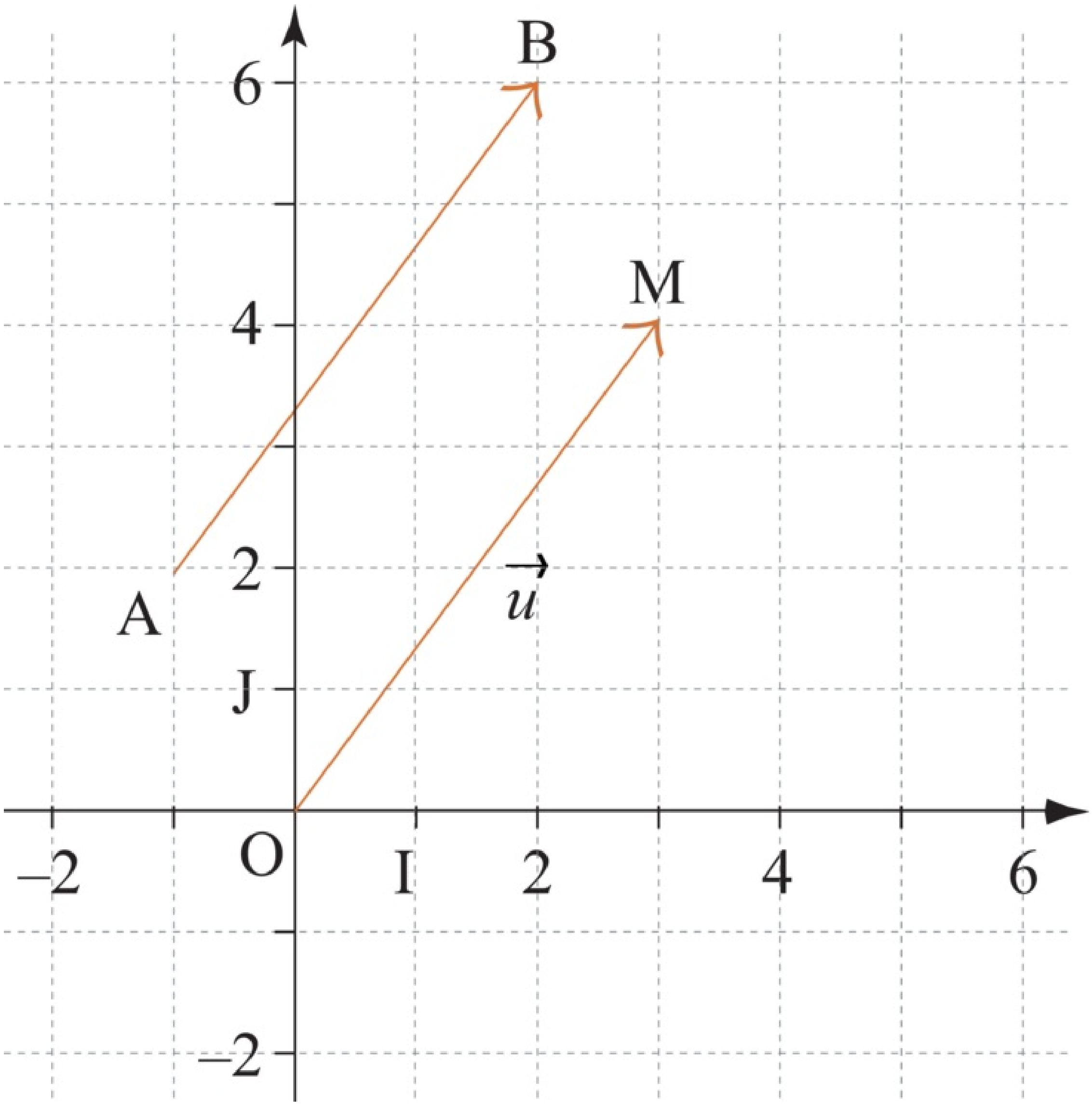
Exercice n°4



4. Quelles sont les bases du calcul vectoriel ?

• Dans un plan muni d'un repère (O ; I, J), à tout vecteur u est associé un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = u$, le point M est l'image de l'origine O du repère par la translation de vecteur u.

Par définition, les coordonnées de u sont celles de M : si M a pour coordonnées $(x\,;\ y)$, le vecteur u a pour coordonnées $(x\,;\ y)$, on écrit $u\,(x\,;\ y)$ ou aussi $u\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$. Par exemple, sur le dessin ci-dessous on a : $u\,(3\,;\ 4)$.



Il en découle que deux vecteurs $u\,(x\,;\ y)$ et $v\,(x'\,;\ y')$ sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées :
$x = x'$
et
$y = y'$
.

• Il est facile de calculer **les coordonnées d'un vecteur** $\overrightarrow{AB}$ quelconque à partir des coordonnées des points A et B. Dans un repère du plan, soit A un point de coordonnées $(x_A\,;\ y_A)$ et B un point de coordonnées $(x_B\,;\ y_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A\,;\ y_B - y_A)$.

• Soit u et $v$deux vecteurs de coordonnées $u\,(x\,;\ y)$ et $v\,(x'\,;\ y')$, alors :
- la **somme de deux vecteurs** $u(x\,;\ y)$ et $v(x'\,;\ y')$ est un vecteur $u + v$ qui a pour coordonnées $(x + x'\,;\ y + y')$;
- le **produit d'un vecteur** $\vec{u}\,(x\,;\ y)$ **par un réel** $\boldsymbol{k}$ est un vecteur $k\,\vec{u}$ qui a pour coordonnées $(kx\,;\ ky)$.

Exercice n°5

Exercice n°6

5. Déterminant de deux vecteurs

Définition : Soit u et v deux vecteurs du plan.
On dit que les vecteurs u et v sont une base du plan si et seulement si u et v ne sont pas colinéaires.

Définition : Soit $u(a; b)$ et $v(c; d)$ deux vecteurs du plan.
Le déterminant des vecteurs u et v est le réel $a \times c - b \times d$. On le note $det(u, v)$.

Propriété : Soit u et v deux vecteurs du plan.
u et v sont colinéaires si et seulement si $det(u, v) = 0$.

Démonstration : u et v sont colinéaires si et seulement si $det(u, v) = 0$.
Soit $u(a; b)$ et $v(c; d)$ deux vecteurs du plan.

u et v sont colinéaires si et seulement si :
$u = 0$ alors $det(u, v) = 0 \times d - c \times 0 = 0$.
Ou $v = 0$ alors $det(u, v) = a \times 0 - 0 \times b = 0$.
Ou $u \neq 0$ et $v \neq 0$ alors il existe un réel k tel que $u = k \times v$.
Si $a = 0$ alors $c = 0$ et $det(u, v) = 0 \times d - 0 \times b = 0$.
Si $b = 0$ alors $d = 0$ et $det(u, v) = a \times 0 - 0 \times c = 0$.
Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors $c \neq 0$ et $d \neq 0$ et $a = k \times c$ et $b = k \times d$.
Donc $k = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ainsi $ad = bc$ d'où $ad - bc = 0$ donc $det(u, v) = 0$.

Propriété 1 : A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Propriété 2 : (AB) et (CD) sont paralléles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Algorithme : Déterminer si trois points sont alignés.

```
xA=float(input("xA="))
yA=float(input("yA="))
xB=float(input("xB="))
yB=float(input("yB="))
xC=float(input("xC="))
yC=float(input("yC="))

if (xB-xA)*(yC-yA)-(yB-yA)*(xC-xA)==0:
    print("A, B et C alignés")
else:
    print("A, B et C non alignés")
```

Exercice n°7

Par exemple, les vecteurs $u \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \end{vmatrix}$ et $v \begin{vmatrix} -7,5 \\ 5 \end{vmatrix}$ sont colinéaires car : $\det\left(u, \underset{vecv}{}\right) = 3 \times 5 - (-2) \times (-7,5) = 0$.

6. Deux propriétés fondamentales

Propriété 1 : Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.
Le milieu du segment $[AB]$ est le point M dont les coordonnées sont $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.
Propriété 2 : Si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A\ ;\ y_A)$ et $(x_B\ ;\ y_B)$, alors on a tout naturellement :
$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Exercice n°8

À retenir

• Un repère du plan est un triplet de points non alignés. À chaque point du plan, on associe un couple unique de nombres réels, ses coordonnées, en traçant des parallèles aux axes passant par ce point.

• Dans un plan muni d'une unité de longueur, un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par trois données : sa direction, son sens et sa longueur.

• La somme de deux vecteurs $u(x\ ;\ y)$ et $v(x'\ ;\ y')$ est un vecteur $u + v$ qui a pour coordonnées $(x + x'\ ;\ y + y')$. Le produit d'un vecteur $\vec{u}(x\ ;\ y)$ par un réel k est un vecteur $k\vec{u}$ qui a pour coordonnées $(kx\ ;\ ky)$.

• Les vecteurs $u(x\ ;\ y)$ et $v(x'\ ;\ y')$ sont colinéaires si et seulement si
$xy' - x'y = 0$

.

7. Projeté orthogonal

Définition : Soit un point M est un point extérieur à une droite (d). On dit que le point N de la droite (d) est le projeté orthogonal du point M sur la droite (d) lorsque les droites (MN) et (d) sont perpendiculaires.
Démonstration : Le projeté de M sur (d) est le point le plus proche de M.
Soit un point M est un point extérieur à une droite (d). Soit H le projeté orthogonal de M sur (d).
Soit A un point de la droite (d) distinct de H. Le triangle MHA est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore on a l'égalité suivante : $MA^2 + HA^2 + MH^2$. Or A et H distinct donc HA > 0 donc $HA^2 > 0$.
Donc $MA^2 > MH^2$. Or la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$ donc $\sqrt{MA^2} > \sqrt{MH^2}$.
Comme MA > 0 et MH > 0 alors MA > MH.
Ainsi H est bien le point de (d) le plus proche de M.

Exercice n°9