R et ses sous-ensembles

Fiche

« Le nombre entier vient de Dieu. Tout le reste est l'œuvre de l'Homme. » Kronecker (1823-1891).
Les entiers naturels ont été considérés à certaines époques comme une connaissance innée ou comme un don des dieux.
Depuis, d'autres familles de nombres ont été « construites » pour résoudre de nouveaux problèmes : nombres décimaux pour améliorer les techniques opératoires, nombres relatifs pour tenir compte des échanges commerciaux, nombres rationnels et irrationnels pour mesurer des grandeurs, etc.
Les intervalles sont des sous-ensembles particuliers, utiles pour noter l'ensemble des solutions d'une inéquation.

1. Comment déterminer à quel(s) ensemble(s) appartient un nombre ?

On distingue **plusieurs ensembles de nombres.**

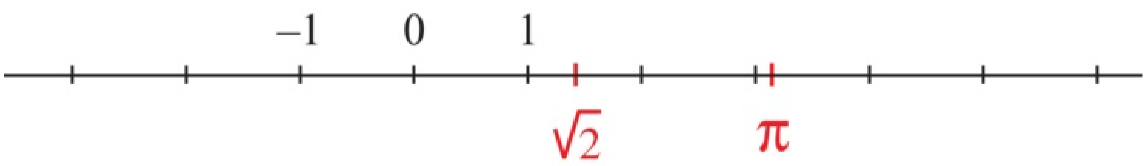
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers ou **entiers naturels**. $\mathbb{N} = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ \dots\}$.

- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres **entiers relatifs**. $\mathbb{Z} = \{\dots\ ;\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ \dots\}$.

- $\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres **décimaux**. Ce sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$; ces nombres ont un nombre fini de chiffres après la virgule.
Par exemple : $\frac{7}{25} = \frac{28}{10^2} = 0,28$ est un décimal, mais $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal.

- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres **rationnels**. Ce sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ (ce sont donc des quotients d'entiers).
Par exemple : $-12 = \frac{-12}{1}$ et $\frac{1}{3}$ sont des rationnels, mais $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres **réels**. C'est l'ensemble de tous les nombres que nous utilisons ; on peut le représenter par une droite graduée :



Chaque nombre réel est représenté par un point et chaque point représente un réel.
Cet ensemble comprend des nombres **irrationnels**, c'est-à-dire des nombres réels qui ne sont pas rationnels. Ex. : π, $\sqrt{2}$.

- Ces ensembles de nombres vérifient les **inclusions** : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

.
Ce qui signifie qu'un naturel est aussi un entier relatif, qu'un entier relatif est aussi un décimal, etc.

• Pour **reconnaître la nature d'un nombre** :
- on simplifie au maximum son écriture ;
- dans le cas d'un quotient irréductible $\frac{a}{b}$, on effectue la division. Si elle se termine (si le reste est nul), $\frac{a}{b}$ est un décimal ; si elle ne se termine pas, on obtient une écriture périodique et $\frac{a}{b}$ est un rationnel qui n'est pas un décimal ;
- si on ne peut pas écrire le nombre comme un quotient d'entiers, alors c'est un irrationnel.

Exercice n°1

Exercice n°2

2. Comment utiliser les intervalles ?

• Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.
L'intervalle **fermé** $[a\,;\,b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$.
L'intervalle **ouvert** $]a\,;\,b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$.

L'intervalle ouvert $]-\infty\,;\,a[$ est l'ensemble des réels x tels que $x < a$.
L'intervalle semi-ouvert (ou semi-fermé) $[a\,;\,b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x < b$.
On définit de même les intervalles $]a\,;\,b]$, $]-\infty\,;\,a]$, $[a\,;\,+\infty[$, $]a\,;\,+\infty[$.
L'ensemble
$\mathbb{R}$
lui-même peut être noté :$]-\infty\,;\,+\infty[$.

• **L'intersection** de deux intervalles I et J est l'intervalle constitué des nombres qui appartiennent à la fois à I et à J.
La **réunion** de deux intervalles I et J est l'ensemble des nombres qui appartiennent à I ou à J (le « ou » est inclusif : on prend les nombres qui appartiennent à I, à J ou aux deux intervalles). Si I et J ont un point en commun, alors $I \cup J$ est un intervalle.

Exemple

Si $I = [-1\,;\,9]$ et $J =]6\,;\,12[$, alors : $I \cap J =]6\,;\,9]$ et $I \cup J = [-1\,;\,12[$.

Exercice n°3

3. Qu'est-ce que la valeur absolue ?

• **Définition :**la **distance** entre deux réels a et b est la différence entre le plus grand et le plus petit. Cette distance est notée $|a - b$
$|$(ou encore $|b$
$|a - b|$ se lit « valeur absolue de a moins b ».

Exemples

$|2019 - 5|$ est la distance entre les réels 5 et 2019. Cette distance est égale à $2019 - 5 = 2014$.
$|-2 - 1515|$ est la distance entre les réels -2 et 1515. Cette distance est égale à $1515 - (-2) = 1517$.

• **Interprétation graphique :** sur une droite graduée d'origine O, notons A le point d'abscisse a et B le point d'abscisse b.
$|a - b|$ est la distance entre les points A et B, c'est-à-dire **la longueur AB**.

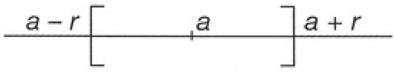
• **Remarque :**la distance entre deux réels est un nombre **positif**. **Conséquence :**$|a|$est la distance entre le réel a et le réel 0.

• **Définition :** pour tout réel a, $\sqrt{a^2} = |a|$
Démonstration par disjonction de cas : a positif puis a négatif.

Exemple

$|2019|=2019$; $|-2019|=2019$.

• **Propriété :** soit a un réel, r est un réel strictement positif. $|x - a|$
$\leqslant$
r si et seulement si x appartient à l'intervalle $[a - r\,;\,a + r]$.



Exemple

$14 \in [10;20]$ car $|15 - 14| \leqslant 5$.

• **Définition :** Un réel x a pour valeur approchée à 10^{-n} près le décimal a lorsque : $|x - a| \leqslant 10^{-n}$.

Exemple

$|8{,}2019 - 8{,}2| \leqslant 10^{-1}$, on dit que 8,2 est une valeur approchée à 0,1 près de 8,2019.

Exercice n°4

Exercice n°5

4. Comment déterminer une valeur approchée ?

• Lorsque l'on veut écrire un nombre réel dans le système décimal et que celui-ci **n'est pas un nombre décimal**, on doit utiliser une **valeur approchée.**
Par exemple, $\frac{1}{3} \approx 0,3333333$. Il n'y a pas égalité car les « 3 » continuent à l'infini.

• Une valeur approchée peut être définie **par défaut ou par excès**. On parle de valeur approchée à 10^{-p} près, où p est un entier, quand la différence entre le nombre et sa valeur approchée est inférieure à 10^{-p}.

• Pour déterminer la valeur approchée d'un nombre réel **positif** à n décimales :
- par défaut, on effectue la troncature à n décimales de ce nombre (cela revient à supprimer les décimales qui suivent les n premières décimales) ;
- par excès, on prend la valeur approchée par défaut et on ajoute 1 à la dernière décimale (cela revient à ajouter 10^{-n} à la valeur approchée par défaut) ;

• Pour déterminer la valeur approchée d'un nombre réel **négatif** à n décimales :
- par excès, on effectue la troncature à n décimales de ce nombre ;
- par défaut, on prend la valeur approchée par excès et on ajoute 1 à la dernière décimale.

• Pour calculer l'**arrondi** d'un nombre réel à n décimales, on considère la troncature du nombre à n décimales, puis :
- si la $n+1$-ième décimale est 0, 1, 2, 3 ou 4, alors l'arrondi est la troncature ;
- si la $n+1$-ième décimale du nombre réel est 5, 6, 7, 8 ou 9, alors on obtient l'arrondi en ajoutant 1 à la dernière décimale de la troncature.

Exercice n°6

Exercice n°7

5. Comment comparer deux nombres ?

• Dire que a est inférieur ou égal à b signifie que la différence $b - a$ est positive ou nulle. On écrit que $a \leq b$ est équivalent à $b - a \geq 0$.
Autrement dit, pour comparer deux nombres, on se ramène à un problème de signe.

• Pour comparer :
- deux nombres a et b : on étudie le **signe de leur différence** ;
- deux fractions : on les réduit à un même dénominateur positif et on compare leurs numérateurs comme indiqué ci-dessus ;
- deux radicaux : on peut comparer leurs carrés.

• Quelques **règles fondamentales** à connaître.

• Deux nombres ont le même signe si et seulement si leur produit est positif.

• Si $a > 1$, alors : $\sqrt{a} < a < a^2 < a^3$.

• Si $0 < a < 1$, alors : $\sqrt{a} > a > a^2 > a^3$.

• Pour tous réels a, b et c, si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$.

6. Comment manipuler des inégalités ?

Il s'agit de savoir comment **« transformer » une inégalité à l'aide des opérations élémentaires**.
Ici, a, b, c et d désignent des réels quelconques.

• Ajouter (ou soustraire) un nombre aux deux membres d'une inégalité conserve l'ordre. Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$.

• Multiplier (ou diviser) par un nombre strictement positif conserve l'ordre. Si $a \leq b$ et $k > 0$, alors $ka \leq kb$.

• Multiplier (ou diviser) par un nombre strictement négatif change l'ordre. Si $a \leq b$ et $k < 0$, alors $ka \geq kb$.

• Ajouter membre à membre deux inégalités de même sens donne une inégalité de même sens. Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

• Si les nombres sont positifs, multiplier membre à membre deux inégalités de même sens, donne une inégalité de même sens. Si $0 < a \leq b$ et $0 < c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

Exercice n°8

À retenir

• $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

• L'intersection de deux intervalles contient les nombres réels qui appartiennent à la fois aux deux intervalles.

• La réunion de deux intervalles contient les nombres réels qui appartiennent à la fois à l'un, à l'autre ou aux deux intervalles à la fois.

• Pour comparer deux nombres a et b, on étudie le signe de leur différence.

• La valeur absolue d'un nombre positif est lui-même ; la valeur absolue d'un nombre négatif est son opposé.

• La distance entre deux réels a et b est égale à la valeur absolue de leur différence, ce qui s'écrit $|b - a|$.