

Fiche

« Le nombre entier vient de Dieu. Tout le reste est l'œuvre de l'Homme. » Kronecker (1823-1891).

Les entiers naturels ont été considérés à certaines époques comme une connaissance innée ou comme un don des dieux. Depuis, d'autres familles de nombres ont été « construites » pour résoudre de nouveaux problèmes : nombres décimaux pour améliorer les techniques opératoires, nombres relatifs pour tenir compte des échanges commerciaux, nombres rationnels et irrationnels pour mesurer des grandeurs, etc.

Les intervalles sont des sous-ensembles particuliers, utiles pour noter l'ensemble des solutions d'une inéquation.

1. Comment déterminer à quel(s) ensemble(s) appartient un nombre ?

On distingue plusieurs ensembles de nombres.

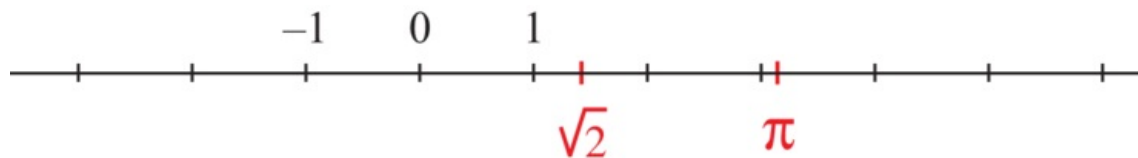
- **\mathbb{N}**
est l'ensemble des nombres entiers ou **entiers naturels**.
 \mathbb{N}
= {0; 1; 2; 3; 4; ...}.

- **\mathbb{Z}**
est l'ensemble des nombres **entiers relatifs**.
 \mathbb{Z}
= {... ; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; ...}.

- **\mathbb{D}**
est l'ensemble des nombres **décimaux**. Ce sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$; ces nombres ont un nombre fini de chiffres après la virgule.
Par exemple : $\frac{7}{25} = \frac{28}{10^2} = 0,28$ est un décimal, mais $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal.

- **\mathbb{Q}**
est l'ensemble des nombres **rationnels**. Ce sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ * (ce sont donc des quotients d'entiers).
Par exemple : $-12 = \frac{-12}{1}$ et $\frac{1}{3}$ sont des rationnels, mais $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.

- **\mathbb{R}**
est l'ensemble des nombres **réels**. C'est l'ensemble de tous les nombres que nous utilisons ; on peut le représenter par une droite graduée :



Chaque nombre réel est représenté par un point et chaque point représente un réel.

Cet ensemble comprend des nombres **irrationnels**, c'est-à-dire des nombres réels qui ne sont pas rationnels. Ex. : π , $\sqrt{2}$.

- Ces ensembles de nombres vérifient les **inclusions** :

\mathbb{N}
 \subset
 \mathbb{Z}
 \subset
 \mathbb{D}
 \subset
 \mathbb{Q}
 \subset
 \mathbb{R}

Ce qui signifie qu'un naturel est aussi un entier relatif, qu'un entier relatif est aussi un décimal, etc.

• Pour **reconnaître la nature d'un nombre** :

- on simplifie au maximum son écriture ;
- dans le cas d'un quotient irréductible $\frac{a}{b}$, on effectue la division. Si elle se termine (si le reste est nul), $\frac{a}{b}$ est un décimal ; si elle ne se termine pas, on obtient une écriture périodique et $\frac{a}{b}$ est un rationnel qui n'est pas un décimal ;
- si on ne peut pas écrire le nombre comme un quotient d'entiers, alors c'est un irrationnel.

 Exercice n°1

 Exercice n°2

2. Comment utiliser les intervalles ?

- Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.

L'intervalle **fermé** $[a ; b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$.

L'intervalle **ouvert** $]a ; b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$.

L'intervalle ouvert $]-\infty ; a[$ est l'ensemble des réels x tels que $x < a$.

L'intervalle semi-ouvert (ou semi-fermé) $]a ; b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x < b$.

On définit de même les intervalles $]a ; b]$, $]-\infty ; a]$, $[a ; +\infty[$, $[a ; +\infty[$.

L'ensemble

\mathbb{R}

lui-même peut être noté $]-\infty ; +\infty[$.

- **L'intersection** de deux intervalles I et J est l'intervalle constitué des nombres qui appartiennent à la fois à I et à J .

La **réunion** de deux intervalles I et J est l'ensemble des nombres qui appartiennent à I ou à J (le « ou » est inclusif : on prend les nombres qui appartiennent à I , à J ou aux deux intervalles). Si I et J ont un point en commun, alors $I \cup J$ est un intervalle.

Exemple

Si $I = [-1 ; 9]$ et $J =]6 ; 12[$, alors : $I \cap J =]6 ; 9]$ et $I \cup J = [-1 ; 12[$.

 Exercice n°3

3. Qu'est-ce que la valeur absolue ?

- **Définition** : la **distance** entre deux réels a et b est la différence entre le plus grand et le plus petit. Cette distance est notée $|a - b|$ (ou encore $|b - a|$).

$|a - b|$ se lit « valeur absolue de a moins b ».

Exemples

$|2019 - 5|$ est la distance entre les réels 5 et 2019. Cette distance est égale à $2019 - 5 = 2014$.

$|-2 - 1515|$ est la distance entre les réels -2 et 1515. Cette distance est égale à $1515 - (-2) = 1517$.

- **Interprétation graphique** : sur une droite graduée d'origine O , notons A le point d'abscisse a et B le point d'abscisse b . $|a - b|$ est la distance entre les points A et B , c'est-à-dire la **longueur** AB .

- **Remarque** : la distance entre deux réels est un nombre **positif**. **Conséquence** : $|a|$ est la distance entre le réel a et le réel 0 .

- **Définition** : pour tout réel a , $\sqrt{a^2} = |a|$

Démonstration par disjonction de cas : a positif puis a négatif.

Exemple

$|2019| = 2019$; $|-2019| = 2019$.

- **Propriété** : soit a un réel, r est un réel strictement positif. $|x - a| \leq r$

\Leftrightarrow

x appartient à l'intervalle $[a - r ; a + r]$.

$$a - r \quad \left[\quad \quad \quad \right] \quad a \quad \quad \quad] \quad a + r$$

Exemple

$14 \in [10; 20]$ car $|15 - 14|$

\leq

5.

• **Définition** : Un réel x a pour valeur approchée à 10^{-n} près le décimal a lorsque : $|x - a|$

\leq

10^{-n} .

Exemple

$|8,2019 - 8,2|$

\leq

10^{-1} , on dit que 8,2 est une valeur approchée à 0,1 près de 8,2019.

 [Exercice n°4](#)

 [Exercice n°5](#)

4. Comment déterminer une valeur approchée ?

• Lorsque l'on veut écrire un nombre réel dans le système décimal et que celui-ci **n'est pas un nombre décimal**, on doit utiliser une **valeur approchée**.

Par exemple, $\frac{1}{3} \approx 0,3333333$. Il n'y a pas égalité car les « 3 » continuent à l'infini.

• Une valeur approchée peut être définie **par défaut ou par excès**. On parle de valeur approchée à 10^{-p} près, où p est un entier, quand la différence entre le nombre et sa valeur approchée est inférieure à 10^{-p} .

• Pour déterminer la valeur approchée d'un nombre réel **positif** à n décimales :

- par défaut, on effectue la troncature à n décimales de ce nombre (cela revient à supprimer les décimales qui suivent les n premières décimales) ;

- par excès, on prend la valeur approchée par défaut et on ajoute 1 à la dernière décimale (cela revient à ajouter 10^{-n} à la valeur approchée par défaut) ;

• Pour déterminer la valeur approchée d'un nombre réel **néгатif** à n décimales :

- par excès, on effectue la troncature à n décimales de ce nombre ;

- par défaut, on prend la valeur approchée par excès et on ajoute 1 à la dernière décimale.

• Pour calculer l'**arrondi** d'un nombre réel à n décimales, on considère la troncature du nombre à n décimales, puis :

- si la

$n + 1$

-ième décimale est 0, 1, 2, 3 ou 4, alors l'arrondi est la troncature ;

- si la

$n + 1$

-ième décimale du nombre réel est 5, 6, 7, 8 ou 9, alors on obtient l'arrondi en ajoutant 1 à la dernière décimale de la troncature.

 [Exercice n°6](#)

5. Comment comparer deux nombres ?

• Dire que a est inférieur ou égal à b signifie que la différence $b - a$ est positive ou nulle. On écrit que $a \leq b$ est équivalent à $b - a \geq 0$.
Autrement dit, pour comparer deux nombres, on se ramène à un problème de signe.

• Pour comparer :

- deux nombres a et b : on étudie le **signe de leur différence** ;
- deux fractions : on les réduit à un même dénominateur positif et on compare leurs numérateurs comme indiqué ci-dessus ;
- deux radicaux : on peut comparer leurs carrés.

• Quelques **règles fondamentales** à connaître.

• Deux nombres ont le même signe si et seulement si leur produit est positif.

• Si $a > 1$, alors : $\sqrt{a} < a < a^2 < a^3$.

• Si $0 < a < 1$, alors : $\sqrt{a} > a > a^2 > a^3$.

• Pour tous réels a , b et c , si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$.

6. Comment manipuler des inégalités ?

Il s'agit de savoir comment « **transformer** » une **inégalité** à l'aide des **opérations élémentaires**.

Ici, a , b , c et d désignent des réels quelconques.

• Ajouter (ou soustraire) un nombre aux deux membres d'une inégalité conserve l'ordre. Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$.

• Multiplier (ou diviser) par un nombre strictement positif conserve l'ordre. Si $a \leq b$ et $k > 0$, alors $ka \leq kb$.

• Multiplier (ou diviser) par un nombre strictement négatif change l'ordre. Si $a \leq b$ et $k < 0$, alors $ka \geq kb$.

• Ajouter membre à membre deux inégalités de même sens donne une inégalité de même sens. Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

• Si les nombres sont positifs, multiplier membre à membre deux inégalités de même sens, donne une inégalité de même sens. Si $0 < a \leq b$ et $0 < c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

À retenir

•
 \mathbb{N}
 \subset
 \mathbb{Z}
 \subset
 \mathbb{D}
 \subset
 \mathbb{Q}
 \subset
 \mathbb{R}
.

• L'intersection de deux intervalles contient les nombres réels qui appartiennent à la fois aux deux intervalles.

• La réunion de deux intervalles contient les nombres réels qui appartiennent à la fois à l'un, à l'autre ou aux deux intervalles à la fois.

• Pour comparer deux nombres a et b , on étudie le signe de leur différence.

• La valeur absolue d'un nombre positif est lui-même ; la valeur absolue d'un nombre négatif est son opposé.

• La distance entre deux réels a et b est égale à la valeur absolue de leur différence, ce qui s'écrit $|b - a|$.