

Fiche

Pour résoudre une équation ou une inéquation du premier degré à une inconnue, on isole le terme inconnu dans un membre. De nouveaux types d'équations et inéquations apparaissent, comportant l'inconnue au carré ou au dénominateur. On s'intéresse également à la résolution conjointe de deux équations (ou de deux inéquations). Cette situation se retrouve par exemple lorsque l'on cherche à déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites.

1. Quelles sont les méthodes pour résoudre une équation ou une inéquation comportant des carrés ?

• Pour résoudre une **équation comportant des carrés**, on revient à une écriture de la forme

$$X^2 = A^2$$

. Deux nombres opposés ont le même carré, donc :

$$X^2 = A^2$$

équivalent à

$$X = A$$

ou

$$X = -A$$

.

Exemple

Résoudre

$$(x - 1)^2 = 9$$

revient à écrire : $x - 1 = 3$ ou $x - 1 = -3$,

soit $x = 4$ ou $x = -2$, d'où $S = \{-2 ; 4\}$.

• Pour résoudre une **inéquation comportant des carrés**, on transpose tous les termes dans un seul membre et on factorise, si possible, en un produit de facteurs du premier degré.

On peut alors en déduire l'ensemble des solutions à l'aide d'un tableau de signes.

Exemple

Résoudre $(x - 1)^2 \leq 9$ revient à écrire : $(x - 1)^2 - 9 \leq 0$.

On reconnaît alors la différence de deux carrés :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

.

D'où : $[(x - 1) - 3][(x - 1) + 3] \leq 0$, ou encore : $(x - 4)(x + 2) \leq 0$.

On conclut à l'aide d'un tableau de signes :

| x | -∞ | -2 | 4 | +∞ |
|----------------|----|----|-------|----|
| x - 4 | - | | - 0 + | |
| x + 2 | - | 0 | | + |
| (x - 4)(x + 2) | + | 0 | - 0 | + |

Le produit est négatif sur l'intervalle $[-2 ; 4]$, d'où : $S = [-2 ; 4]$.

Exercice n°1

2. Quelles sont les méthodes pour résoudre une équation ou une inéquation comportant l'inconnue au dénominateur ?

• Dans le cas d'une **équation**, on écrit l'égalité des « produits en croix » pour obtenir une égalité sans dénominateur.

Exemple

Pour $x \neq 0$, résoudre l'équation $\frac{x-1}{x} = \frac{2}{3}$ équivaut à résoudre :

$$3(x-1) = 2x$$

.

D'où :

$$3x - 3 = 2x$$

, ou encore

$$3x - 2x = 3$$

, soit $x = 3$.

L'ensemble des solutions es $S = \{3\}$.

• Dans le cas d'une **inéquation**, on transpose tous les termes dans un seul membre et on fait apparaître si possible un quotient de facteurs du premier degré. On peut alors déterminer l'ensemble des solutions à l'aide d'un tableau de signes.

Exemple

Pour $x \neq 0$, résoudre l'équation $\frac{x-1}{x} \leq \frac{2}{3}$ équivaut à résoudre $\frac{x-1}{x} - \frac{2}{3} \leq 0$.

En réduisant au même dénominateur, on obtient : $\frac{3x-3}{3x} - \frac{2x}{3x} \leq 0$, soit $\frac{x-3}{3x} \leq 0$.

On conclut à l'aide d'un tableau de signes :

| | | | | |
|------------------|-----------|-----|-------|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | 3 | $+\infty$ |
| $x - 3$ | - | | - 0 + | |
| $3x$ | - | 0 | | + |
| $\frac{x-3}{3x}$ | + | | - 0 + | |

Le quotient est négatif sur l'intervalle $]0 ; 3]$, donc $S =]0 ; 3]$.

 [Exercice n°2](#)

 [Exercice n°3](#)

3. Comment résoudre un système d'équations du premier degré à deux inconnues ?

Il y a deux méthodes : par substitution ou par addition.

• Si l'une des inconnues possède un coefficient égal à 1 ou -1 , il est préférable d'utiliser la **méthode par substitution**.

Dans l'une des équations, on écrit l'inconnue dont le coefficient est 1 ou -1 en fonction de l'autre, puis on substitue cette écriture à l'inconnue de la seconde équation.

Exemple

Dans le système $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$, on exprime x en fonction de y dans la première équation et on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} x = 3 - 2y \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

On remplace ensuite x par

$$3 - 2y$$

dans la seconde équation, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} x = 3 - 2y \\ 2(3 - 2y) + 3y = 4 \end{cases} \text{ qui équivaut à } \begin{cases} x = 3 - 2y \\ -y + 6 = 4 \end{cases}, \text{ soit encore à } \begin{cases} x = 3 - 4 = -1 \\ y = 6 - 4 = 2 \end{cases}.$$

On obtient ainsi le couple solution : $S = \{-1 ; 2\}$.

• Si les coefficients des inconnues sont différents de 1 ou de -1 , pour éviter l'apparition d'écritures fractionnaires, on utilise la **méthode**

par addition.

Cette méthode consiste à faire apparaître des coefficients opposés pour l'une des inconnues, en multipliant les équations par des réels bien choisis. En additionnant membre à membre les deux équations transformées, on obtient une équation à une seule inconnue que l'on peut résoudre. On utilise alors ce résultat pour résoudre l'autre équation.

Exemple

Dans le système $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$, on multiplie les termes de la première équation par 2 et ceux de la seconde par 3 et on obtient le système équivalent : $\begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ 9x - 6y = 12 \end{cases}$.

On additionne membre à membre les deux équations et on remplace la seconde équation du système par le résultat ; on obtient le système équivalent : $\begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ 13x = 26 \end{cases}$, soit encore $\begin{cases} 8 + 6y = 14 \\ x = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = (14 - 8) \div 6 = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

On en déduit le couple solution : $S = \{(2; 1)\}$.

• Un système peut n'avoir aucune solution ou encore une infinité de solutions.

Soit le système : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$. Si les coefficients de x et de y sont proportionnels, c'est-à-dire si

$$ab' = a'b$$

, ce système a une infinité de solutions ou pas de solution du tout :

- si $ac' \neq a'c$, alors le système n'a pas de solution ;

- si

$$ac' = a'c$$

(les coefficients des deux équations sont proportionnels), alors le système a une infinité de solutions.

Exercice n°4

• On trouvera dans la fiche « Lire ou compléter un algorithme », un algorithme permettant de résoudre tout système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

4. Comment résoudre un système d'inéquations du premier degré à une inconnue ?

Pour résoudre un système de deux inéquations du premier degré à une inconnue, on résout chacune des inéquations, on obtient ainsi deux intervalles de solutions. On cherche ensuite la **partie commune aux deux intervalles** ; si elle existe, c'est la solution du système.

Exemple

On veut résoudre le système : $\begin{cases} 2x < 3 \\ x + 4 > 0 \end{cases}$.

Ce système est équivalent à : $\begin{cases} x < 1,5 \\ x > -4 \end{cases}$.

L'ensemble des solutions du système est donc l'intersection de deux intervalles :

$S =] - \infty ; 1,5[\cap] - 4 ; +\infty[$. D'où : $S =] - 4 ; 1,5[$. (Il peut être utile de dessiner les intervalles pour déterminer l'intersection.)

Exercice n°5

5. Démonstrations

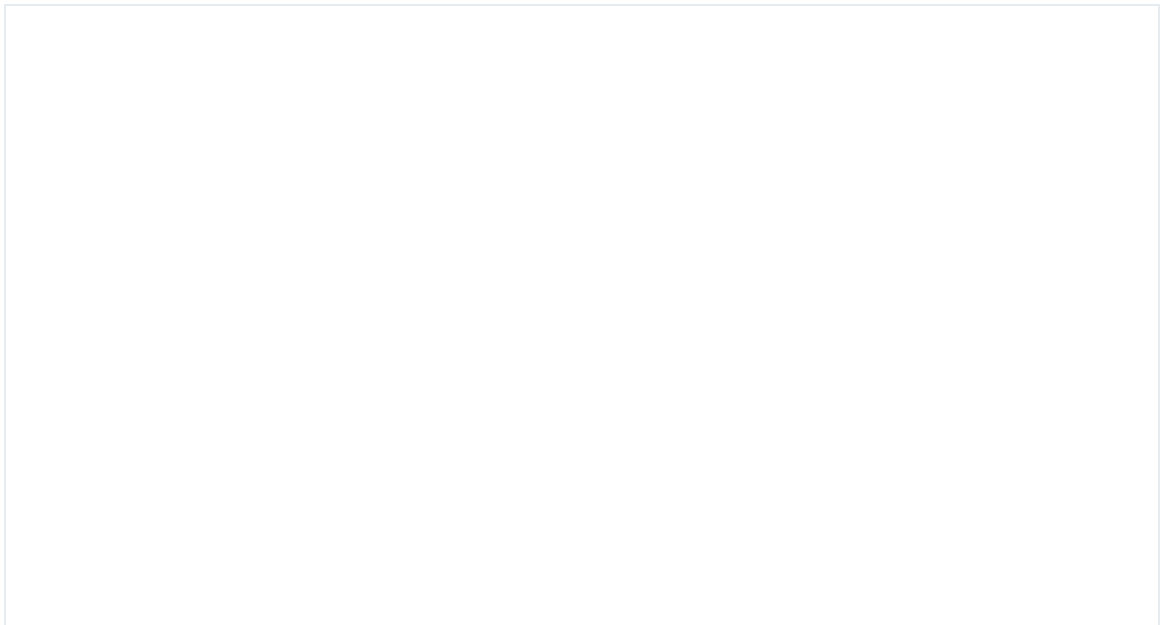
Démonstration 1 : Pour tout réels positifs a et b ,

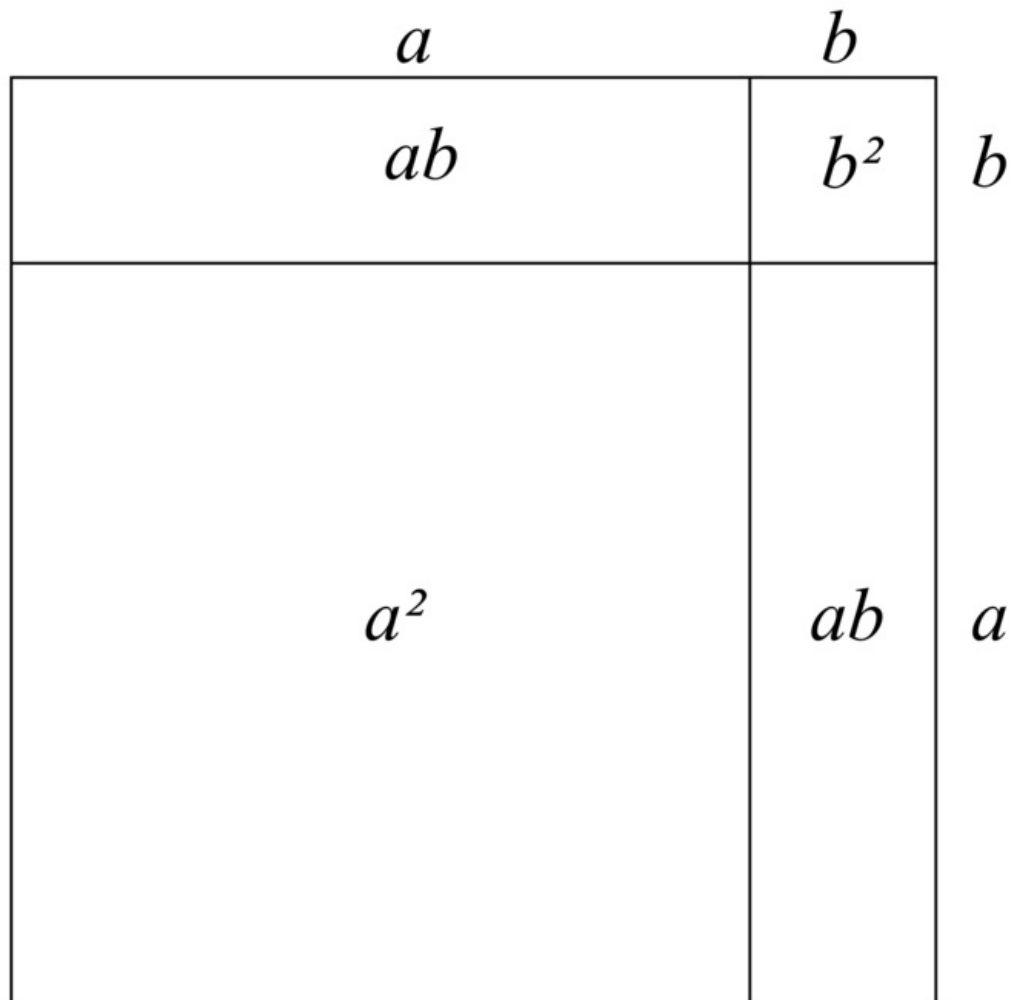
$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Pour tout réels positifs a et b :

d'une part : $(\sqrt{ab})^2 = ab$.

d'autre part :





$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) = \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b} = ab.$$

On a donc $(\sqrt{ab})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$ et $\sqrt{ab} \geq 0$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \geq 0$.

Ainsi, pour tout réels positifs a et b , $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Démonstration 2 : Pour tout réels strictement positifs a et b , $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Pour tout réels strictement positifs a et b :

d'une part : $(\sqrt{a+b})^2 = a + b$.

d'autre part : $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

On a donc $(\sqrt{a+b})^2 > (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ car $2\sqrt{ab} > 0$

On a donc $(\sqrt{a+b})^2 < (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ et $\sqrt{a+b} > 0$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$.

Donc $\sqrt{(\sqrt{a+b})^2} < \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$.

Ainsi $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Démonstration 3 : Pour tout réels et positifs, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

On considère un grand carré de côté longueur $a + b$.

On peut construire à l'intérieur de ce carré deux rectangles d'aire ab ainsi que un carré d'aire a^2 et un carré d'aire b^2 .

D'une part le grand carré a pour aire $(a + b)^2$.

D'autre part le grand carré a pour aire $ab + b^2 + a^2 + ab$ soit $a^2 + 2ab + b^2$.

L'aire d'un carré étant unique on a donc $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Algorithme : Soit a et c deux réels strictement positifs. Déterminer le plus petit entier b tel que $a^b \leq c$.

```
a=float(input("a="))
c=float(input("c="))
b=1
while a**b<=c:
    b=b+1
print("Ainsi on a",a,"^",b,"<=",c)
```