# Fiche

**Chaque fois qu'une grandeur *y* dépend d'une grandeur *x*, on dit que la première est une fonction de la seconde. Par exemple, la température est fonction de l'altitude : connaissant l'altitude, on peut calculer la température.**
**On va, ici, préciser cette notion de fonction, définir l'ensemble de définition d'une fonction (en effet si la variable apparaît en dénominateur ou sous un radical, certaines valeurs réelles sont alors interdites) et introduire l'étude de son sens de variation (la plupart des fonctions sont rarement monotones : leur sens de variation peut changer plusieurs fois sur leur ensemble de définition).**

## 1. Une fonction est-elle toujours définie ?

• Une fonction numérique est une relation qui, à toute valeur d'une variable *x*, prise sur une partie $D$ de l'ensemble des réels, associe **une image unique *y*.**
Si on appelle *f* cette fonction, on note : $y = f(x)$.

## Exemple

Si une automobile consomme 10 litres aux 100 km et dispose d'un plein de 50 litres, le nombre *y* de litres restant dans le réservoir s'écrit en fonction du nombre *x* de kilomètres parcourus, selon la formule : $y = 50 - 0,1\,x$. Si on appelle *f* la fonction qui à *x* associe *y*, on a : $f(x) = 50 - 0,1\,x$.
Comme l'automobiliste ne pourra pas parcourir plus de 500 kilomètres, on dira que son ensemble de définition est l'intervalle [0 ; 500] et on note $D_f = [0\,;\ 500]$.

• Une fonction **n'est pas définie** pour les valeurs qui :
- annulent son dénominateur ;
- rendent négatives une expression sous un radical.

## Exemple

La fonction inverse ($x \mapsto \frac{1}{x}$) est définie pour tous les réels non nuls. Son ensemble de définition est donc : $D = ]-\infty\,;\ 0[\,\cup\,]0\,;\ +\infty[$.
La fonction racine carrée ($x \mapsto \sqrt{x}$) est définie pour tout réel positif ou nul : $D = [0\,;\ +\infty[$.

Exercice n°1

## 2. Comment calculer une image ?

• Pour calculer l'image d'un nombre, **on remplace la variable par ce nombre** et on effectue les calculs **en respectant les priorités** opératoires.
On effectue d'abord les calculs entre parenthèses, on calcule ensuite les puissances, puis produits et quotients. On termine par les sommes algébriques.
Par exemple, pour calculer l'image de 5 par la fonction *f* définie sur
$\mathbb{R}$
par
$f(x) = 4(x-3)^2 - 1$
, on effectue :
$f(5) = 4(5-3)^2 - 1 = 4 \times 2^2 - 1 = 4 \times 4 - 1 = 16 - 1 = 15$.

• Pour compléter un tableau de valeurs, on utilise la table de la calculatrice.
Après avoir affiché la fonction, on précise les valeurs extrêmes de la variable et le pas séparant deux valeurs consécutives (sur Texas Instruments : sous la rubrique *Tableset* ; sur Casio : sous la rubrique *Range*). On peut alors faire s'afficher, sur deux colonnes, les valeurs de la variable et celles de l'image.
Par exemple, pour compléter le tableau de valeurs suivant :

| x | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f*(*x*) | | | | | |

on part de 1 pour arriver à 3 avec un pas de 0,5.

Exercice n°2

## 3. Comment calculer un antécédent ?

• Calculer un antécédent par la fonction *f* d'un nombre réel *a*, c'est **résoudre l'équation**
$f(x) = a$

.

Ainsi, chercher l'antécédent de 3 par la fonction affine *f*, définie sur
$\mathbb{R}$
par
$f(x) = 2x - 1$

, revient à calculer la valeur de *x* telle que
$2x - 1 = 3$
.

• Attention, pour certaines fonctions un réel peut avoir plusieurs antécédents. Il peut aussi n'avoir aucun antécédent.
Par exemple, pour la fonction carré définie sur
$\mathbb{R}$
$(x \mapsto x^2)$ : 4 a pour antécédents 2 et −2 ; mais −4 n'a pas d'antécédent.

Exercice n°3

## 4. Comment détermine-t-on le sens de variation d'une fonction ?

• Soit une fonction *f* et *I* un intervalle inclus dans l'ensemble de définition de *f*.

• Pour qu'une fonction *f* soit **croissante** sur un intervalle *I*, il faut que, pour tous nombres $a$ et $b$ de cet intervalle tels que $a < b$, on ait $f(a) \leq f(b)$.
Plus directement, pour qu'une fonction soit croissante il faut et il suffit qu'elle **respecte l'ordre** : *f*(*a*) et *f*(*b*) doivent être rangés dans le même ordre que $a$ et $b$ sur l'intervalle *I*.
Si l'on a *f*(*a*) < *f*(*b*), c'est-à-dire une inégalité stricte, *f* est **strictement croissante**.

• Pour qu'une fonction *f* soit **décroissante** sur un intervalle *I*, il faut que, pour tous nombres $a$ et $b$ de cet intervalle, tels que $a < b$, on ait $f(a) \geq f(b)$.
Plus directement, pour qu'une fonction soit décroissante il faut et il suffit qu'elle **inverse l'ordre** : *f*(*a*) et *f*(*b*) doivent être rangés dans l'ordre inverse de celui de $a$ et $b$ sur l'intervalle *I*.
Si l'on a *f*(*a*) > *f*(*b*), la fonction *f* est **strictement décroissante**.

• Pour qu'une fonction *f* soit **constante** sur un intervalle *I*, il faut que, pour deux nombres $a$ et $b$ de cet intervalle tels que $a < b$, on ait $f(a) = f(b)$.
Plus directement, une fonction est constante sur un intervalle *I* lorsque tous les réels de cet intervalle ont la même image.

**Remarque**

Il ne faut pas confondre le sens de variation d'une fonction et son **signe.** Une fonction peut être positive et décroissante, c'est le cas pour la fonction carré $x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$. Elle peut aussi être négative et croissante, c'est le cas pour la fonction affine $x \mapsto x - 2$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 2]$.

### Exemple

Soit la fonction affine *f*, définie sur [-1 ; 5] par
$f(x) = -2x + 3$

:

Pour tous réels $a$ et $b$ tels que : $-1 < a < b < 5$, on a :
$2 > -2a > -2b > -10$ ;
$5 > -2a + 3 > -2b + 3 > -7$ ;
soit $5 > f(b) > f(a) > -7$.
Comme l'ordre est inversé, *f* est donc décroissante sur l'intervalle [-1 ; 5].
On peut résumer ces informations en un **tableau de variation** :

| Valeurs de la variable $x$ | $-1$ | | $5$ |
|---|---|---|---|
| Sens de variation de $f$ | $5$ | $\searrow$ | $-7$ |

Plus directement, une fonction affine est décroissante lorsque son coefficient directeur est négatif. S'il est positif, la fonction affine est croissante.

• Un opérateur est une fonction qui commande une seule opération. Quand une fonction se décompose en une **chaîne d'opérateurs**, on applique successivement ces opérateurs aux nombres $a$ et $b$.

## Exemple

Soit la fonction $f$, définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par
$f(x) = -2x^2 + 3$
. On décompose cette fonction en opérateurs : $x \xrightarrow{carre} x^2 \xrightarrow{\times(-2)} -2x^2 \xrightarrow{+3} -2x^2 + 3$.
Pour $1 < a < b$, on a :
$1 < a^2 < b^2$
, puis
$-2 > -2a^2 > -2b^2$
et
$1 > -2a^2 + 3 > -2b^2 + 3$
.
Donc
$f(a) > f(b)$
. L'ordre est inversé, on en déduit que la fonction $f$ est décroissante sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

## 5. Comment déterminer le signe d'une fonction ?

Pour savoir sur quelle partie de son ensemble de définition une fonction $f$ est positive, on résout l'inéquation $f(x) \geq 0$. La fonction est alors négative sur l'autre partie.
Attention : une fonction peut être positive et décroissante (comme, par exemple, la fonction : $x \mapsto -2x + 20$, définie sur [5 ; 10]) ou négative et croissante (comme la fonction : $x \mapsto 2x + 1$, définie sur [-10 ; -5]).

Exercice n°4

Définition : Soit f une fonction numérique définie pour tout x de I (I une partie de
$\mathbb{R}$
).
On dit que f est paire si et seulement si :
I est symétrique par rapport à 0 et pour tout x de I, f(x) = f(−x).
On dit que f est impaire si et seulement si :
I est symétrique par rapport à 0 et pour tout x de I, f(−x) = −f(x).
Exemples :
La fonction carré est paire. En effet l'ensemble de définition de la fonction carré est
$\mathbb{R}$
.
$\mathbb{R}$
est bien un ensemble symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout x de
$\mathbb{R}$
 :
$(-x)^2 = (-1 \times x)^2 = (-1)^2 \times x^2 = 1 \times x^2 = x^2$
La fonction inverse est impaire. En effet l'ensemble de définition de la fonction inverse est
$\mathbb{R}$
*.
$\mathbb{R}$
* est bien un ensemble symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout x de
$\mathbb{R}$
* :
$\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$
Conséquence graphique :
On munit le plan d'un repère orthogonal. Soit f une fonction numérique et $C_f$ la courbe représentative de f dans le repère.
Si f est paire alors $C_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Si f est impaire alors $C_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.
Illustration : La parabole représentant la fonction carré est bien symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. L'hyperbole représentant la fonction inverse est bien symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exercice n°5

## À retenir

• On doit exclure de l'ensemble de définition les valeurs de la variable qui annulent les dénominateurs et le limiter à celles pour lesquelles les nombres sous les radicaux sont positifs.

• Une fonction est croissante sur un intervalle lorsque les images de tout couple de nombres $a$ et $b$ de cet intervalle sont dans le même ordre que ces deux nombres. Si l'ordre est inversé, la fonction est décroissante.

• On ne confondra pas le sens de variation et le signe. Une fonction peut être positive et décroissante aussi bien que négative et croissante.