Pourcentages

Fiche

C'est sous la Révolution française que s'impose l'usage, dans notre pays, du système métrique décimal. On voit alors apparaître l'expression *pour cent* qui au milieu du XIX[e] siècle donne naissance au mot pourcentage.
La notion de pourcentage, utilisée aujourd'hui de manière quasi quotidienne dans la presse ou la publicité, est souvent mal maîtrisée et source d'erreurs. Précisons ici le calcul et l'usage des pourcentages.

1. Comment calculer un pourcentage ?

On définit d'abord ***E* l'ensemble** (ou la quantité) **de référence**, puis ***A* la partie (ou la quantité) dont on calcule la proportion.** On appelle, ici, n la grandeur de E et p la grandeur de A.
Le pourcentage de A dans E (ou de A par rapport à E) est le nombre t tel que :
$\frac{t}{100} = \frac{p}{n}$, soit $t = \frac{p}{n} \times 100$.

Exemple

Sur une facture, on a les indications suivantes :
Prix HT : 250 € – TVA : 45 € – Prix TTC : 295 €.
Quel est le taux de TVA appliqué ?
On cherche le pourcentage de 45 par rapport à 250.
La quantité de référence est le prix HT : 250.
La quantité dont on calcule la proportion est : 45.
Le pourcentage de TVA est donc : $\frac{45}{250} \times 100 = 18$. Soit 18 %.

Exercice n°1

Exercice n°2

2. Comment utiliser un pourcentage ?

• Prendre **t % d'un nombre x,** c'est multiplier x par $\frac{t}{100}$.
Ainsi, si un prix HT est de 330 € et que le taux de TVA est de 5,5 %, le montant de la TVA est « 5,5 % de 330 », c'est-à-dire :
$\frac{5,5}{100} \times 330$; soit 18,15 €.

• Si **le nombre y représente t % de x**, on a $x \times \frac{t}{100} = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{t} \times 100$.
Prenons un exemple. La TVA sur un produit est de 6 % et s'élève à 27 €. Le prix hors taxe est le nombre x dont 6 % est égal à 27, c'est-à-dire le nombre x qui vérifie :
$x \times \frac{6}{100} = 27 \Leftrightarrow x = \frac{27}{6} \times 100$.
D'où
$x = 450$
.

• Pourcentage de pourcentage : **prendre m % de t %,** c'est prendre $\frac{m \times t}{100}$ %.
Exemple : dans un lycée, il y a 60 % de filles et parmi elles 30 % sont internes. Le pourcentage de filles internes dans le lycée est : $\frac{60 \times 30}{100} = 18$. Il y a donc 18 % de filles internes dans le lycée.

Exercice n°3

Exercice n°4

Exercice n°5

Exercice n°6

3. Comment calculer une augmentation ou une diminution de pourcentage ?

• **Augmenter une quantité de t %** équivaut à multiplier sa valeur initiale par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.
Ainsi, augmenter une quantité de 55 % équivaut à multiplier sa valeur initiale par $\left(1 + \frac{55}{100}\right) = 1,55$.

• **Diminuer une quantité de t %** équivaut à multiplier sa valeur initiale par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$.
Ainsi, diminuer une quantité de 66 % équivaut à multiplier sa valeur initiale par $\left(1 - \frac{66}{100}\right) = 0,34$.

Remarque

Considérer une augmentation ou une diminution en pourcentage comme une multiplication par $\left(1 \pm \frac{t}{100}\right)$ facilite la résolution de nombreux problèmes. Il faut être capable d'utiliser ce résultat dans les deux sens :

- pour appliquer une augmentation ou une diminution (voir ci-dessus) ;
- pour **déterminer un pourcentage d'augmentation ou de diminution**.

Prenons un exemple. Le prix HT d'un produit est de 330 €, son prix TTC de 387,75 €. Pour trouver le taux de TVA (pourcentage d'augmentation), on appelle x une augmentation telle que : $330 \times x = 387,75 \Leftrightarrow x = \frac{387,75}{330} \Leftrightarrow x = 1,175$.
Comme $1,175 = 1 + \frac{17,5}{100}$, on en déduit que le taux de TVA est de 17,5 %.

Exercice n°7

Exercice n°8

Exercice n°9

4. Quel calcul effectuer dans le cas d'augmentations ou de diminutions successives ?

• Appliquer à une quantité une **augmentation de t % puis de m %** équivaut à multiplier sa valeur initiale par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)\left(1 + \frac{m}{100}\right)$.

• Appliquer à une quantité une **diminution de t % puis de m %** équivaut à multiplier sa valeur initiale par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)\left(1 - \frac{m}{100}\right)$.

• Appliquer à une quantité une **augmentation de t % puis une diminution de m %** équivaut à multiplier sa valeur initiale par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)\left(1 - \frac{m}{100}\right)$.

Exercice n°10

Exercice n°11

Exercice n°12

5. Comment formuler des variations sous forme d'indices ?

On part d'une **série chronologique** :

Date	t_0	t_1	...	t_k
Valeur	A_0	A_1	...	A_k

L'indice $I_{k,0}$ à la date t_k, en prenant 100 pour base à la date t_0 , est la quantité :
$I_{k,0} = 100 \times \frac{A_k}{A_0}$.

Remarques

• L'indice est la quatrième proportionnelle dans le tableau de proportionnalité :

100	$I_{k,0}$
A_0	A_k

• Les indices permettent non seulement de **comparer plusieurs séries,** mais aussi de déterminer rapidement des **pourcentages d'évolution.** Ainsi, le pourcentage d'évolution de A_0 à A_k est : $\left(I_{k,0} - 100\right)$ %.

Exercice n°13

Exercice n°14

6. Evolution réciproque

Définition : L'évolution réciproque d'une évolution de la valeur V_0 à V_1 est l'évolution de la valeur V_1 à V_0.

Propriété : L'évolution réciproque d'une évolution est une évolution de coefficient multiplicateur inverse.
Plus précisément, l'évolution réciproque d'une évolution de coefficient multiplicateur CM à pour coefficient multiplicateur $\text{CM}' = \frac{1}{\text{CM}}$

Remarque :

Soit V_0 et V_1 deux valeurs d'une même grandeur.
On définit deux évolutions réciproques : celle de V_0 à V_1 et celle de V_1 à V_0.
On désigne par t% le taux d'évolution de V_0 à V_1 et t'% celui deV_1 à V_0.
Ainsi $\mathrm{CM} \times \mathrm{CM}' = 1$
Soit $(1+\frac{t}{100}) \times (1+\frac{t'}{100}) = 1$
Soit $t' = (\frac{1}{1+\frac{t}{100}} - 1) \times 100$
Exemple
Durant la journée de mardi, une action a augmenté de 7%.
Le mercredi soir, elle est revenue à son cours du mardi matin.
Calculer le taux d'évolution réciproque durant la journée du mercredi. Arrondir au dixième.
$\mathrm{CM} \times \mathrm{CM}' = 1$
$1,07 \times \mathrm{CM}' = 1$
$\mathrm{CM}' = \frac{1}{1,07}$
$\mathrm{CM}' = 0,934579\ldots$
$\mathrm{CM}' = 1 - 0,0654205\ldots$
$\mathrm{CM}' = 1 - \frac{6,54205\cdots}{100}$
Durant la journée du mercredi, l'action a subi une baisse de 6,5% (arrondi au dixième).

Exercice n°15

À retenir

- Le pourcentage de A de grandeur p dans E de grandeur n est le nombre $\frac{p}{n} \times 100$.
- Augmenter une quantité de t % équivaut à multiplier sa valeur initiale par : $\left(1+\frac{t}{100}\right)$.
- Diminuer une quantité de t % équivaut à multiplier sa valeur initiale par : $\left(1-\frac{t}{100}\right)$.
- L'indice $I_{k,0}$ à la date t_k, en prenant 100 pour base à la date t_0, est la quantité :
$I_{k,0} = 100 \times \frac{A_k}{A_0}$.