Fiche

Par une lettre du 29 juillet 1654, Pascal répond à Fermat sur le problème des « parties » (Pascal, *Œuvres complètes*, Gallimard, « La Pléiade », p. 77). On peut dater de ce jour la naissance des probabilités. Cette branche des mathématiques prendra son plein essor avec les Bernoulli, puis avec Poisson, jusqu'à fournir, au XX^e siècle, la base théorique nécessaire à la conception des lois de toutes les sciences, de la physique à la sociologie.

1. Comment définir une probabilité ?

• On part d'une **expérience aléatoire *E***, c'est-à-dire d'une expérience dont on peut prévoir les issues possibles, mais dont on ne connaît le résultat qu'après sa réalisation.

• Première étape : à l'aide d'un arbre, par exemple, on détermine toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire. On définit ainsi **l'univers** Ω comme **l'ensemble de toutes les issues possibles de *E*.** On a : $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

• Seconde étape : **à chaque issue on attribue une probabilité**, c'est-à-dire qu'à chaque e_i on associe un nombre p_i. Ces nombres doivent vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{cases} 0 \le p_i \le 1, \text{pour tout } i \in \{1, \ldots, n\} \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 \end{cases}$$

Pour déterminer les nombres p_i, il existe deux possibilités :

- soit on associe à toutes les issues la même probabilité $p_i = \frac{1}{n}$, on dit alors que la probabilité est **équirépartie** ou que l'on est dans une situation d' **équiprobabilité** ;
- soit on répète l'expérience dans des conditions identiques, on définit alors p_i comme la fréquence de x_i quand le nombre de répétitions tend vers $+\infty$.

• À l'issue de ces deux étapes, on a établi la **loi de probabilité** que l'on présente sous forme de tableau :

Issue	e_1	e_2	...	e_n	
Probabilité	p_1	p_2	...	p_n	1

Remarque

La première étape est essentielle. Il s'agit d'abord de bien comprendre l'expérience, de la visualiser et de la simuler pour écrire quelques issues possibles. Il s'agit enfin de déterminer toutes les issues de l'expérience. C'est dans ce « toutes » que réside la difficulté.

Exercice n°1

Exercice n°2

Exercice n°3

2. Comment calculer la probabilité d'un événement ?

Soit E une expérience aléatoire et $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, l'univers associé à *E*.

• On appelle **événement** de l'expérience aléatoire *E*, tout sous-ensemble de Ω.
Autrement dit, un **événement *A*** est une partie de Ω.
Quand x_i appartient à *A*, on dit aussi que x_i **réalise** *A*.
On appelle **événement élémentaire,** un événement constitué d'un seul élément de Ω, c'est-à-dire constitué d'une seule issue $\{e_i\}$.

• La **probabilité *P(A)*** d'un événement *A* est **la somme des probabilités des issues** qui le constituent.
Dans le cas où la probabilité est équirépartie, chaque issue e_i

a pour probabilité $\frac{1}{n}$.
Ainsi, si A contient m éléments, $P(A) = m \times \frac{1}{n}$.
Autrement dit : $P(A)$ est égal au rapport du nombre d'éléments de A par le nombre d'éléments de Ω.

Remarques

• La probabilité d'un événement élémentaire $\{e_i\}$ est
p_i
.

• Ω est appelé **événement certain** ; $P(\Omega) = 1$.

• Le sous-ensemble vide, noté
$\emptyset$
, est appelé **événement impossible** ;
$P(\emptyset) = 0$
.

Exercice n°4

Exercice n°5

Exercice n°6

3. Comment calculer la probabilité de l'union de deux événements ?

• Soit A et B deux événements d'une même expérience aléatoire.
$A \cup B$ est l'événement constitué des issues qui appartiennent à A **ou** à B.
$A \cap B$ est l'événement constitué des issues qui appartiennent **à la fois à A et à B.**
Quand
$A \cap B = \emptyset$
, c'est-à-dire quand aucune issue n'appartient à la fois à A et à B, on dit que A et B sont **incompatibles** (ou disjoints).

• Si A et B sont quelconques : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Si A et B sont incompatibles (ou disjoints) : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exercice n°7

Exercice n°8

4. Comment calculer la probabilité d'un événement contraire ?

L'**événement contraire** de A, noté $\overline{A}$, est l'événement qui se réalise **quand A n'est pas réalisé.** Il est constitué des issues de Ω qui n'appartiennent pas à A.
Cela se résume ainsi :
$A \cap \overline{A} = \emptyset$
et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

• En utilisant les propriétés du paragraphe précédent, on montre que, pour tout événement A : $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

Exercice n°9

Exercice n°10

À retenir

• Définir une probabilité, c'est associer à chaque issue
x_i
un nombre
p_i
positif de telle sorte que
$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$
.

• La probabilité $P(A)$ d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui le constituent.

• Dans le cas équiprobable : $P(A) = \frac{\text{nombre d'elements de A}}{\text{nombre d'elements de }\Omega}$.

• Soit A et B deux événements quelconques : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

• Soit A un événement quelconque : $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.