

# La fonction exponentielle

## Fiche

C'est en recherchant des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  dont la dérivée est proportionnelle à la fonction que l'on est conduit à l'étude de la fonction exponentielle. Celle-ci joue un rôle capital en mathématiques, car c'est une fonction de référence : elle intervient dans de nombreuses lois de probabilité.

### 1. Comment définir la fonction exponentielle ?

#### Définition

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur l'ensemble des réels vérifiant les deux conditions suivantes :

- pour tout réel  $x$ ,  $\exp'(x) = \exp(x)$  et  $\exp(0) = 1$ . Conséquences :  $e^0 = 1$  ;  $e^1 = e \approx 2,718$  ;  $e^{-1} = \frac{1}{e}$  et  $e^{0,5} = \sqrt{e}$  ;
- pour tout réel  $x$  on a :  $e^x \times e^{-x} = 1$ .

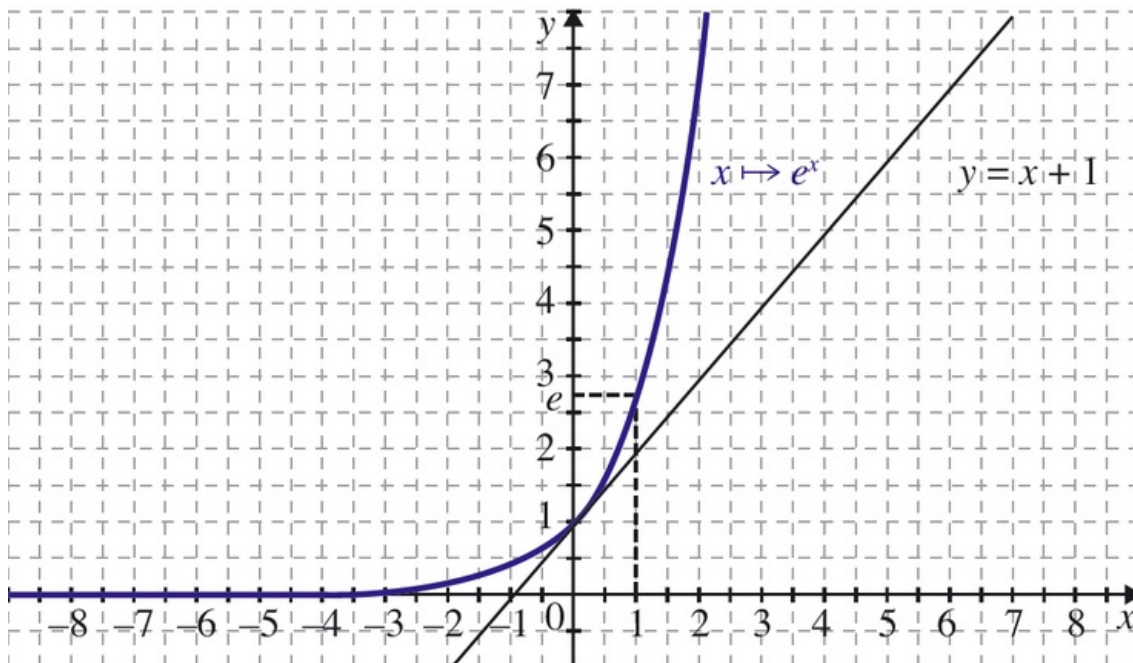
#### Dérivée, courbe représentative

La fonction exponentielle est égale à sa dérivée.

La fonction exponentielle est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ , donc sa fonction dérivée aussi, ainsi la fonction exponentielle est strictement croissante sur

$\mathbb{R}$

#### Courbe représentative de la fonction exponentielle



#### Dérivée de la fonction $e^u$

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , alors pour tout réel  $x$  appartenant à  $I$  on a :  $(e^u)'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$ .

[Exercice n°1](#)

[Exercice n°2](#)

### 2. Quelles sont les propriétés à retenir ?


Propriétés :

- relation fonctionnelle : quels que soient les réels  $x$  et  $y$  on a :  $e^x \times e^y = e^{x+y}$  ;
- quels que soient les réels  $x$  et  $y$  on a  $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$  ;
- pour tout nombre réel  $x$  on a :  $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$  ;
- pour tout nombre réel  $x$  on a :  $e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$  ;
- pour tout nombre réel  $x$  et pour tout entier  $n$  on a :  $(e^x)^n = e^{nx}$  ;
- $e^a = e^b$  si et seulement si  $a = b$  ;

- $e^a < e^b$  si et seulement si  $a < b$ .

 [Exercice n°4](#)

 [Exercice n°5](#)

 [Exercice n°6](#)

## À retenir

- La fonction exponentielle est l'unique fonction  $f$  dérivable sur l'ensemble des réels qui est sa propre dérivée et qui vérifie  $f(0) = 1$ .
- Pour tout réel  $x$  on a :  $e^x \times e^{-x} = 1$ .
- Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , alors pour tout réel  $x$  appartenant à  $I$  on a :  $(e^u)'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$ .
- $\text{Exp}(x) > 0$  pour tout réel  $x$ .