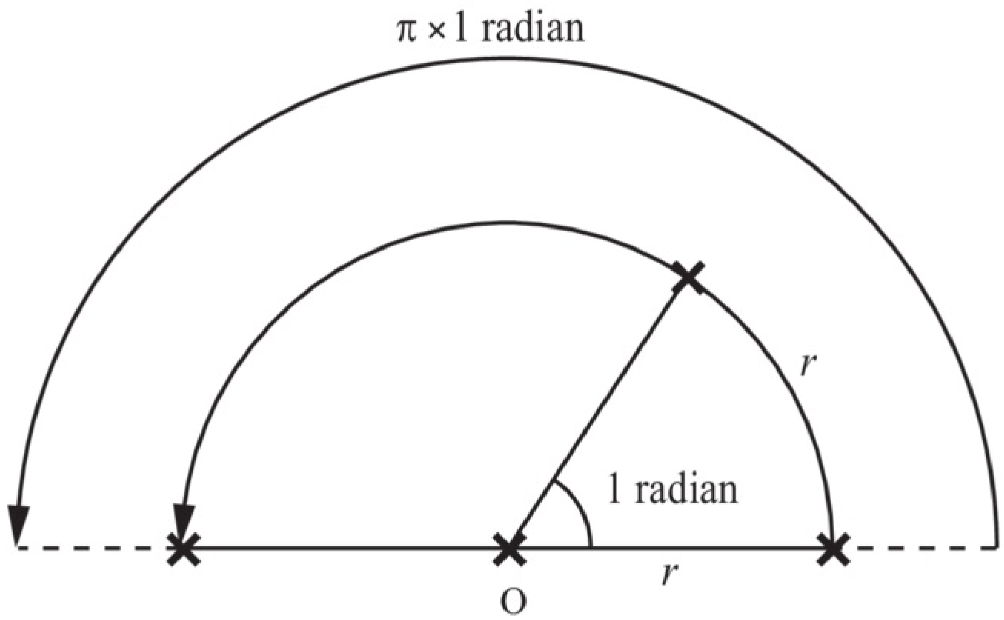
Fiche

Dans un triangle, les angles géométriques sont saillants. Leur mesure varie de 0 à 180°. Pour un cercle, les angles au centre rentrants peuvent mesurer jusqu'à 360°.
Les angles orientés ont des mesures réelles, éventuellement négatives ou supérieures à 360°. Au degré, on préfère alors le radian.
Le sinus et le cosinus d'un angle orienté se définissent à partir du cercle trigonométrique, centré sur l'origine d'un repère orthonormal, de rayon 1 et parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

1. Quel est l'intérêt d'une mesure d'angle en radian ?

Définition : Le *radian* est la mesure d'un angle au centre qui découpe, sur le cercle, un arc dont la longueur est égale au *rayon*.



Conversion : Le périmètre d'un cercle de rayon r est égal à $2\pi\ r$. Donc 2π radians équivalent à 360°. Soit 1 radian = $\frac{360°}{2\pi}$ ou 1 radian $\approx$ 57,30°.
On retiendra : π radians = 180°, ou plus simplement π = 180°.
Mesure d'un arc : La mesure d'un arc est la mesure de l'angle au centre qui intercepte cet arc.
Longueur d'un arc : Un angle de α radians intercepte un arc de longueur l = r × α.
Une mesure en degrés nécessiterait le calcul préalable du périmètre du cercle et aboutirait à une formule plus compliquée :
$l = 2\pi r \times \frac{\alpha}{360} = \frac{\pi r \alpha}{180}$

Exercice n°1

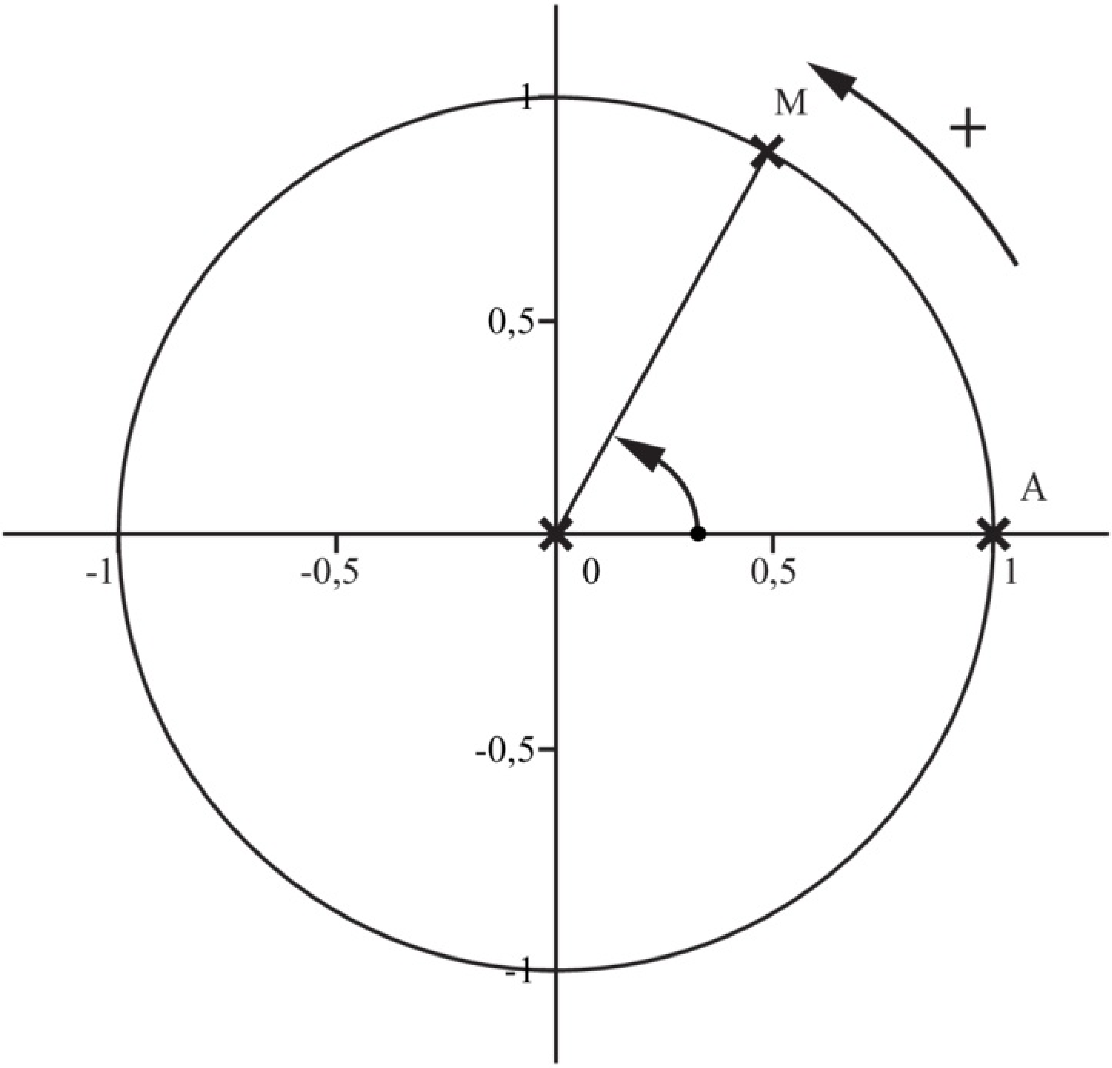
Exercice n°2

2. Qu'est-ce qu'un angle orienté ?

Orientation du plan : Le plan est orienté dans le sens positif lorsque tous les cercles de ce plan sont parcourus dans le sens positif, c'est-à-dire le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Cercle trigonométrique : Dans un repère orthonormé, c'est le cercle
- de rayon 1,
- centré sur l'origine,
- parcouru dans le sens positif.

Définition : Si A et M sont deux points d'un cercle trigonométrique de centre O, l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ est l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OM})$.
Un repère orthonormé (O ; I ; J) est direct lorsque $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{2}$.
Mesure d'un angle orienté : Si α est la mesure d'un angle orienté alors tout autre mesure de la forme $y = \alpha + 2k\pi (k \in Z)$

convient. Plus directement on note $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM}) = \alpha[2\pi]$ (la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM})$ est égale à α à 2π près).



Exercice n°3

Exercice n°4

3. Comment déterminer la mesure principale d'un angle orienté ?

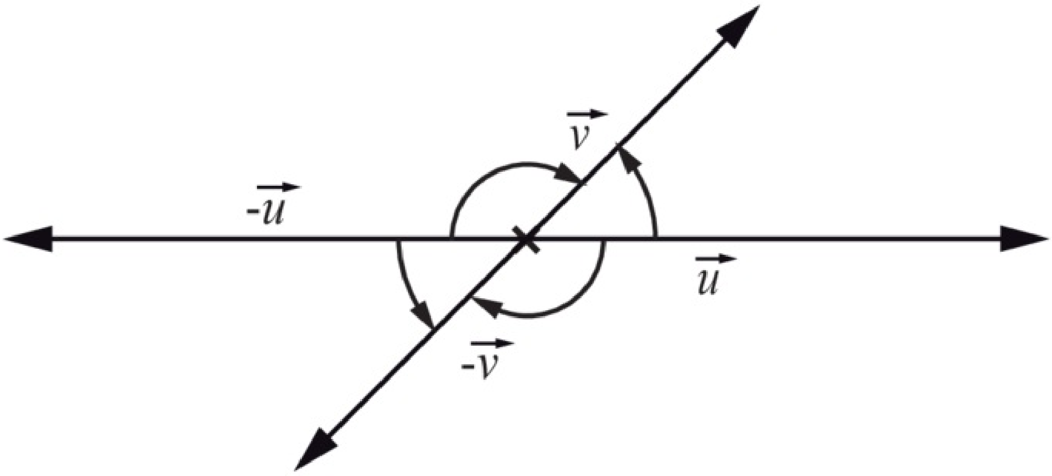
Définition : Un angle orienté possède une infinité de mesures. En ajoutant ou en retranchant 2π à une mesure donnée on obtient une autre mesure possible.
La mesure principale α vérifie $-\pi < \alpha \leq \pi$.
Méthode : On décompose la mesure donnée pour faire apparaître une somme dont l'un des termes est multiple de 2π.
Exemple : Pour un angle mesurant $\frac{27\pi}{4}$ radians on écrit :
$\frac{27\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 6\pi + \frac{3\pi}{4} = 3 \times 2\pi + \frac{3\pi}{4}$.
Comme $-\pi < \frac{3\pi}{4} \leq \pi$, c'est la mesure principale de l'angle de $\frac{27\pi}{4}$ radians.

Exercice n°5

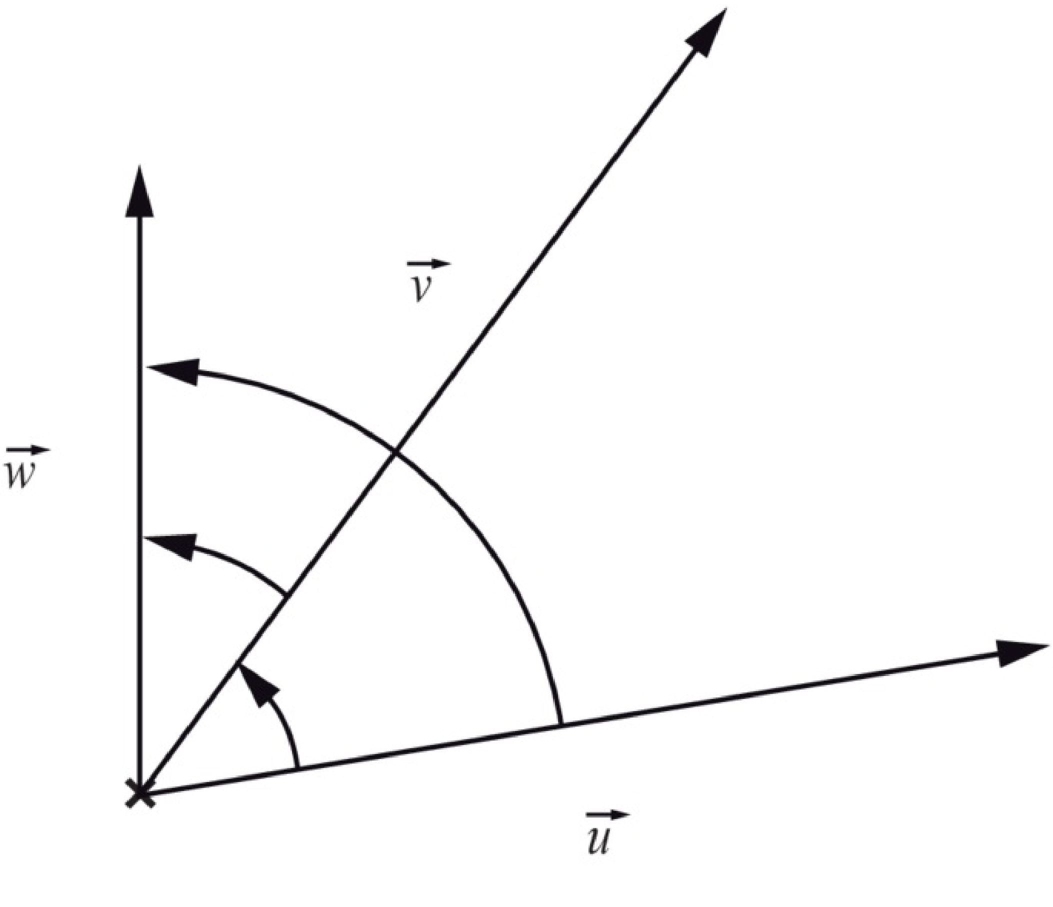
Exercice n°6

4. Quelles sont les propriétés des angles orientés ?

Transformations d'écritures : Si u et v sont deux vecteurs non nuls du plan alors :
$(-u ; u) = (u ; -u) = \pi\ [2\pi]$,
$(v ; u) = -(u ; v)\ [2\pi]$,
$(-u ; -v) = (u ; v)\ [2\pi]$,
$(-u ; v) = (u ; -v) = \pi + (u ; v)\ [2\pi]$ ou $(-u ; v) = (u ; -v) = -\pi + (u ; v)\ [2\pi]$.



Relation de Chasles : Si u, v et w sont trois vecteurs non nuls du plan alors : $(u\,;\,v) + (v\,;\,w) = (u\,;\,w)$ $[2\pi]$.



Exercice n°7

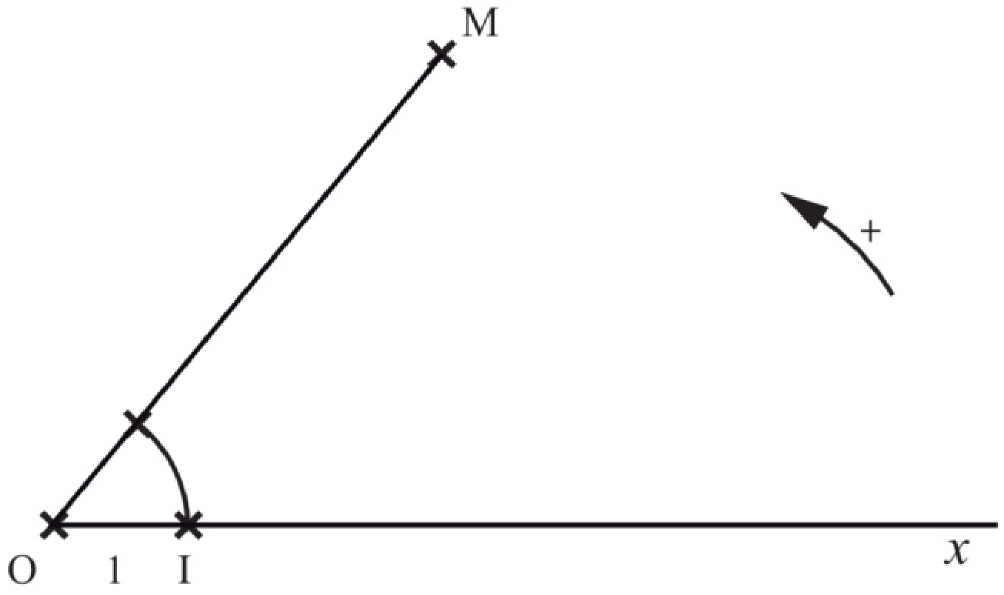
Exercice n°8

5. Qu'est-ce qu'un repérage polaire ?

Définition : dans un repère du plan, défini par un point origine et deux vecteurs non nuls et non colinéaires, tout point M est repéré par deux coordonnées cartésiennes, son abscisse et son ordonnée.

On peut aussi repérer le point M à l'aide d'une origine O et d'une demi-droite [Ox) de repère unitaire $\overrightarrow{OI}$, le plan étant orienté dans le sens positif. Le premier paramètre est la longueur OM (le *rayon*) et le second la mesure principale α de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM})$ (l'*azimut*).

Soit M(OM ; α).

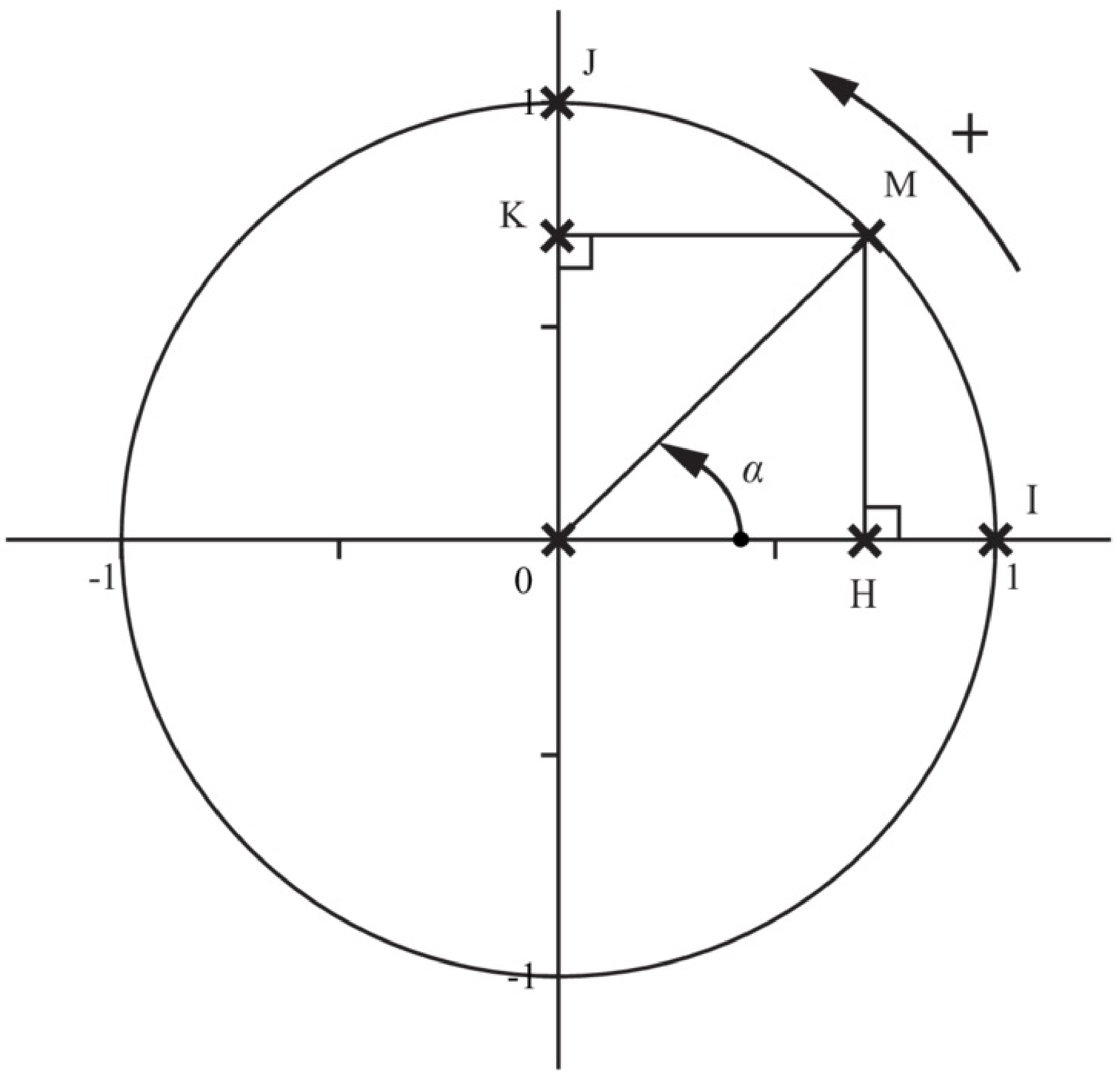


Exercice n°9

Exercice n°10

6. Comment déterminer le cosinus et le sinus d'un angle orienté ?

(O ; I ; J) est un repère orthonormé du plan.



M est un point du cercle trigonométrique et $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = \alpha$.

Pour $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, on a : $\cos \alpha = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{1} = OH$ et $\sin \alpha = OK = \frac{HM}{OM} = \frac{HM}{1} = HM = OK$.

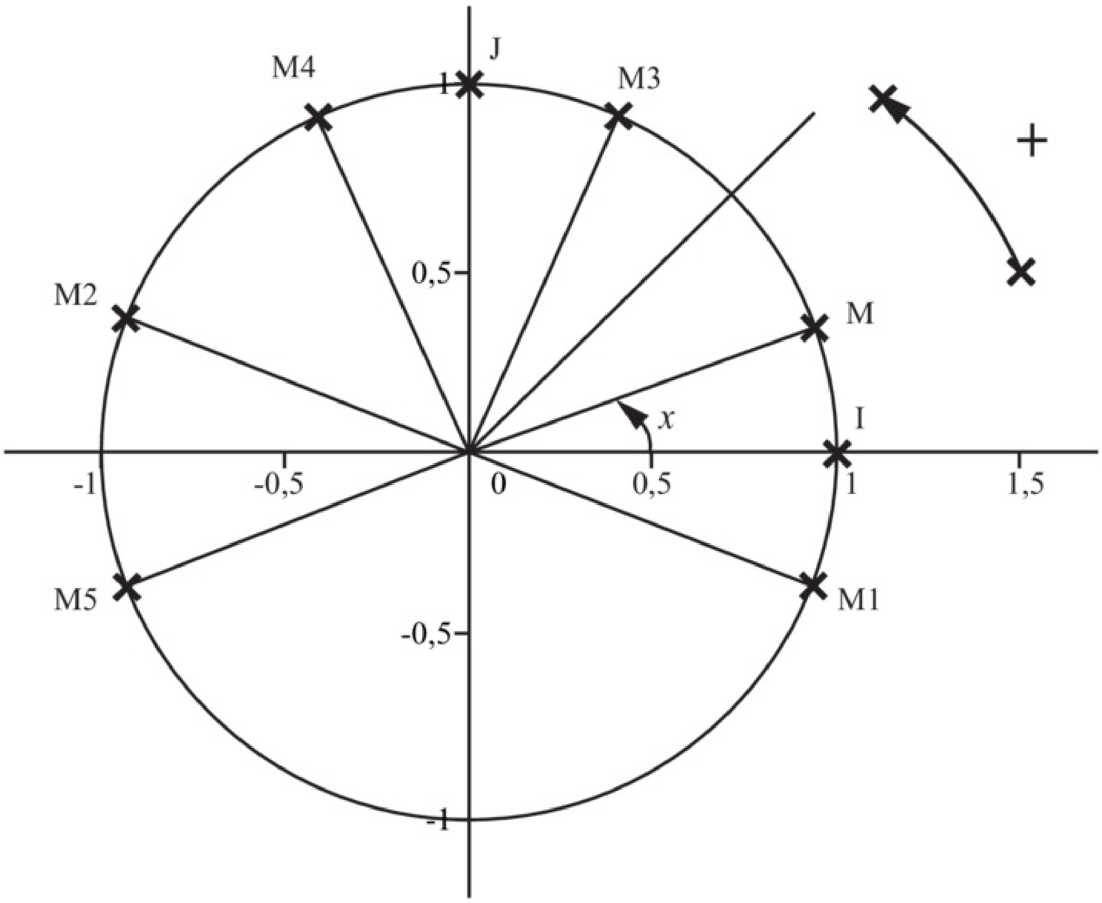
Plus généralement le point M pour coordonnées $M(\cos\alpha ; \sin\alpha)$.
Le cosinus de l'angle $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM})$ est l'abscisse du point M. Le sinus est son ordonnée.

Exercice n°11

Exercice n°12

7. Quels sont les cosinus et sinus des angles associés ?

Soit M un point du cercle trigonométrique de repère orthonormé direct (O ; I ; J).
On pose $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM}) = x$.



Angles opposés : soit M_1 le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM_1}) = -x$.
Les points M et M_1 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Donc : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.
Angles supplémentaires : soit M_2 le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM_{2'}}) = \pi - x$.
Les points M et M_2 sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Donc : $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$.
Angles complémentaires : soit M_3 le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM_3}) = \frac{\pi}{2} - x$.
Les points M et M_3 sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OJ})$. Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.
Angles ayant un écart de $\frac{\pi}{2}$: soit M_4 le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM_4}) = \frac{\pi}{2} + x$. Le point M_4 est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ (attention au signe « $-$ ») et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.
Angles ayant un écart de π : soit M_5 le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM_5}) = \pi + x$. Les points M et M_5 sont symétriques par rapport à O. Donc : $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

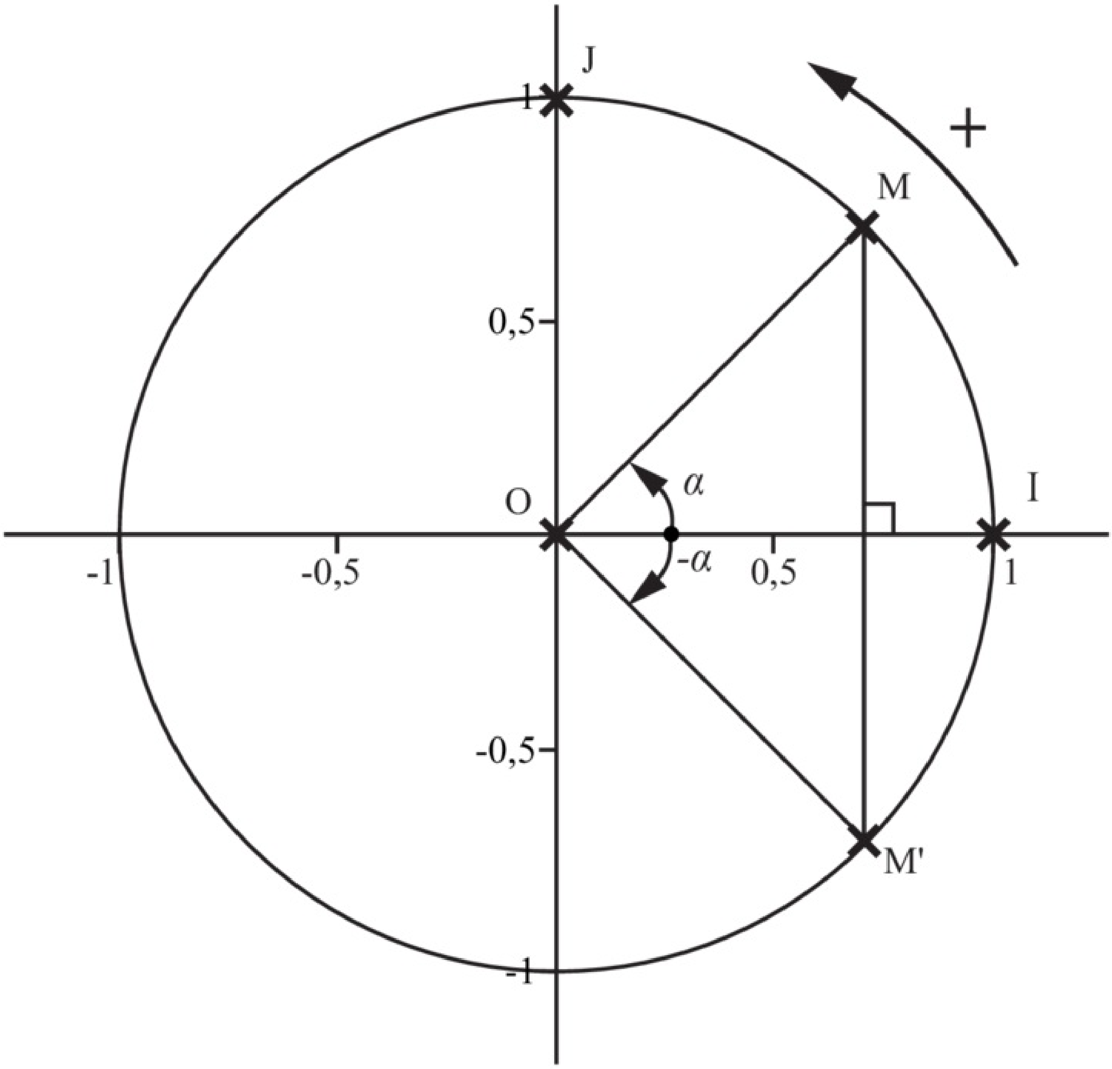
Exercice n°13

Exercice n°14

8. Quelles sont les solutions des équations trigonométriques cos $x = a$ ou x = b ?

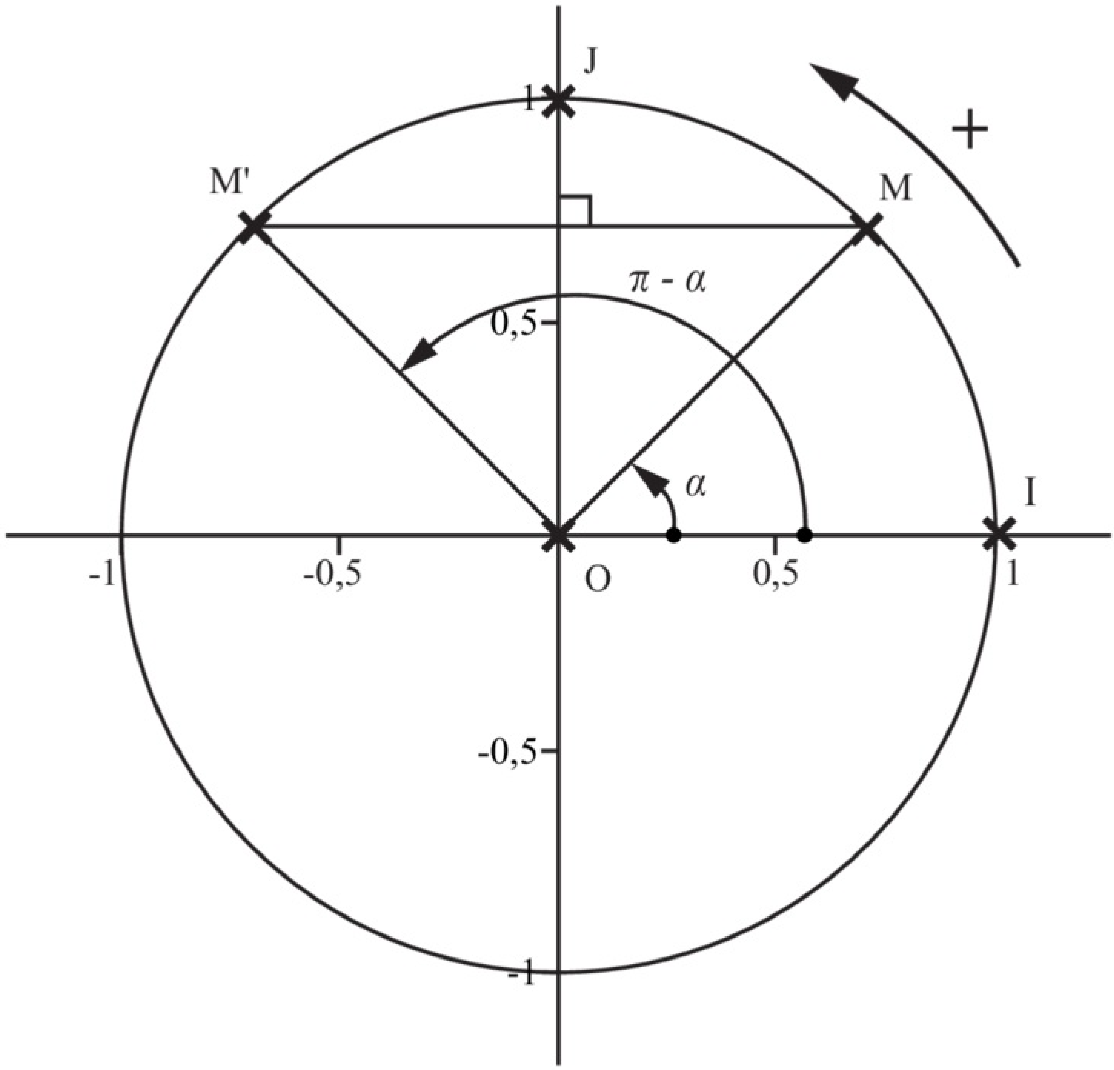
Égalité de deux cosinus : soient deux points M et M' du cercle trigonométrique d'un repère orthonormé (O ; I ; J) du plan. Les cosinus des angles $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM'})$ sont égaux si et seulement si les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des

abscisses.
Donc $\cos \alpha' = \cos \alpha$ équivaut à $\alpha' = \alpha + 2k\pi$ ou $\alpha' = -\alpha + 2k\pi$ ($k \in Z$).



Deux angles orientés ont le même cosinus si et seulement si leurs mesures principales sont égales ou opposées.

Égalité de deux sinus : Les sinus des angles $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM}')$ sont égaux si et seulement si les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
Donc $\sin \alpha' = \sin \alpha$ équivaut à $\alpha' = \alpha + 2k\pi$ ou $\alpha' = \pi - \alpha + 2k\pi$ ($k \in Z$).



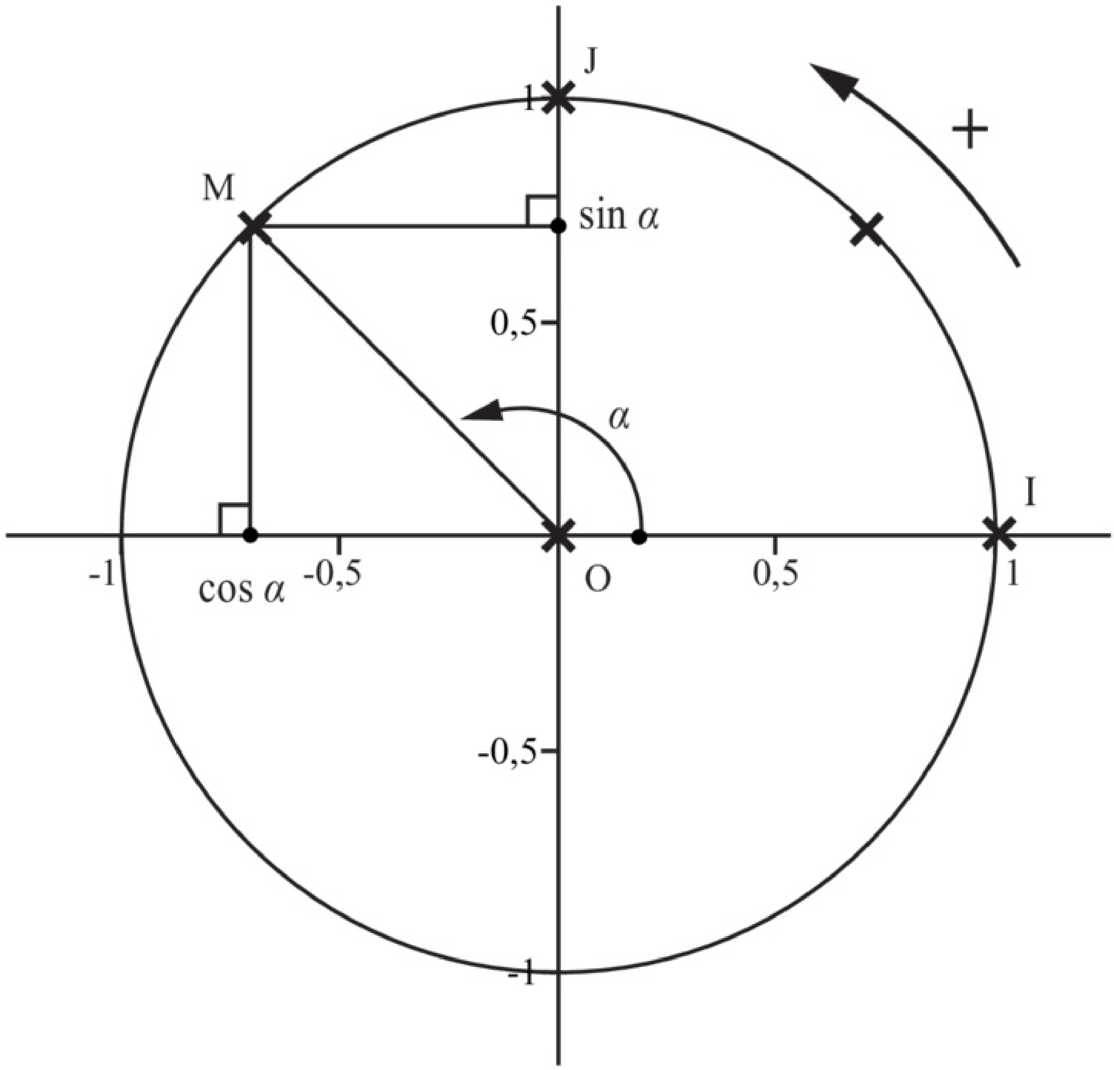
Deux angles orientés ont le même sinus si et seulement si leurs mesures principales sont égales ou supplémentaires.

Exercice n°15

Exercice n°16

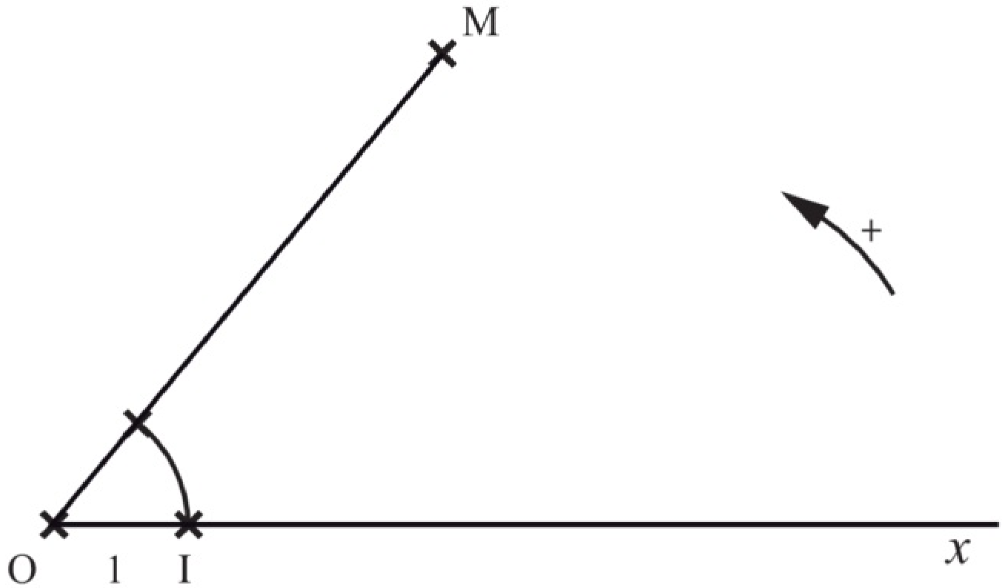
À retenir

Formule de **conversion : π radians = 180°**
Longueur de l'arc de cercle intercepté par un angle au centre de α radians sur un cercle de rayon r : $l = r \times \alpha$.
Cercle trigonométrique : Dans un repère orthonormé, c'est le cercle de rayon 1, centré sur l'origine et parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.



Notation d'un angle orienté : $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM}) \equiv \alpha\,[2\pi]$ (La mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM})$ est égale à α à 2π près).

Mesure principale α d'un angle orienté : $-\pi < \alpha \leq \pi$.
Repérage d'un point M en **coordonnées polaires**, dans un repère composé d'une origine O et d'une demi-droite [Ox) de repère unitaire $(\overrightarrow{OI})$:
M(OM ; α), avec α mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM})$.



Relation de Chasles : $(u\,;\,v) + (v\,;\,w) = (u\,;\,w)\ [2\pi]$.
Formules des angles associés :
$\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$;
$\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$;

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$;
$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$;
$\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$;

Équations trigonométriques :

$\cos \alpha' = \cos \alpha$ équivaut à $\alpha' = \alpha + 2k\pi$ ou $\alpha' = -\alpha + 2k\pi$ $(k \in Z)$;
$\sin \alpha' = \sin \alpha$ équivaut à $\alpha' = \alpha + 2k\pi$ ou $\alpha' = \pi - \alpha + 2k\pi$ $(k \in Z)$.