Fiche

Certaines suites ont des propriétés particulières, comme les suites arithmétiques et les suites géométriques.
De telles suites sont définies par récurrence, mais on peut calculer leur terme général en fonction du rang, ainsi que la somme des premiers termes.
C'est pourquoi les suites arithmétiques et les suites géométriques interviennent dans de nombreux domaines tels l'économie ou les sciences physiques ; ces suites s'appliquent en effet aux placements de capitaux à intérêts simples ou composés, aux désintégrations de substances radioactives, etc.

1. Comment montrer qu'une suite est ou n'est pas arithmétique ou géométrique ?

• Une **suite arithmétique** est une suite telle que chaque terme se déduit du précédent par l'addition d'un réel constant (appelé la **raison** de la suite). Pour montrer qu'une suite (U_n) est arithmétique, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la différence $U_{n+1} - U_n$ est constante (c'est-à-dire ne dépend pas de n).
Pour montrer qu'une suite (U_n) n'est pas arithmétique, il suffit de calculer les 3 premiers termes U_0, U_1 et U_2 (ou parfois les 4 ou 5 premiers, si les 3 premiers ne suffisent pas) et de constater que $U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$.

• Une **suite géométrique** est une suite telle que chaque terme se déduit du précédent par la multiplication par un réel constant (également appelé la **raison** de la suite). Pour montrer qu'une suite (V_n) est géométrique, on montre qu'il existe un réel q constant tel que, pour tout entier n, $V_{n+1} = q \times V_n$.
Pour montrer qu'une suite (V_n) n'est pas géométrique, il suffit de calculer les 3 (voire les 4 ou 5) premiers termes V_0, V_1 et V_2 et de constater que, si $V_1 \neq 0$ et $V_0 \neq 0$, $\frac{V_2}{V_1} \neq \frac{V_1}{V_0}$.

Exercice n°1

Exercice n°2

2. Quel est le terme général d'une suite arithmétique ? D'une suite géométrique ?

• Si r est la raison d'une **suite arithmétique** (U_n) et U_p l'un de ses termes, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_p + (n-p)\,r$.
Les cas particuliers où le premier terme est U_0 ou U_1 sont fréquents. On a alors :
$\boldsymbol{U_n = U_0 + nr}$
ou $U_n = U_1 + (n-1)\,r$.

• Si q est la raison d'une **suite géométrique** (V_n) et V_p est l'un de ses termes, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_p \times q^{(n-p)}$.
Les cas particuliers où le premier terme est V_0 ou V_1 sont fréquents. On a alors $V_n = V_0 \times q^n$ ou $V_n = V_1 \times q^{(n-1)}$.

Exercice n°3

3. Quelle est la somme des premiers termes d'une suite arithmétique ? Celle des premiers termes d'une suite géométrique ?

• Démonstration :
Soit k un entier naturel supérieur à 1.
Soit S = 1 + 2 + 3 + ... + (k–2) + (k–1) + k. S comporte k termes.
On a aussi S = k + (k − 1) + (k − 2) + ... + 3 + 2 + 1.
En effectuant la somme on obtient :
2S = (1 + k) + (2 + k − 1) + (3 + k − 2) + ... + (k-2 + 3) + (k − 1 + 2) + (k + 1).
On remarque que 2S est composé de k termes tous égaux à k + 1, d'où :
$2S = k \times (k+1)$
Donc $S = \frac{k \times (k+1)}{2}$

• Soit (V_n) une **suite géométrique** de raison q. La somme S' des premiers termes de cette suite est donnée par la formule :
$S' = \left(1^{\text{er}} \text{ terme}\right) \times (\text{nombre de termes})$, si
$\boldsymbol{q = 1}$

et $S' = \left(1^{\text{er}}\text{terme}\right) \times \left(\frac{1-q^{(\text{nombre de termes})}}{1-q}\right)$, si $q \neq 1$.

Exercice n°4

Exercice n°5

Exercice n°6

4. Quels algorithmes sont à connaître ?

• Calculer un terme d'une suite arithmétique de premier terme U et de raison -9.

```
def terme(n,u):
    for i in range(n):
        u=u-9
    return u
```

• Déterminer le plus petit entier naturel n tel que U_n soit inférieur ou égal à s.

```
def seuil(s,u):
    n=0
    while u<s:
        n=n+1
        u=1+2*u
    return n
```

• calcul de factorielle n.

```python
def factorielle(n):
    a=1
    for i in range(1,n+1):
        a=a*i
    return a
```

À retenir

• Une suite (U_n) est arithmétique si la différence de deux termes consécutifs quelconques est constante, c'est-à-dire s'il existe un réel r indépendant de n tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n + r$. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $U_n = U_p + (n-p)r$. Et la somme S des premiers termes de cette suite est donnée par la formule :
$S = \left(\frac{1^{\text{er}}\text{terme}+\text{dernier terme}}{2}\right) \times (\text{nombre de termes})$.

• Une suite (V_n) est géométrique s'il existe un réel q constant tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = qV_n$. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $V_n = V_p \times q^{(n-p)}$. Et la somme S' des premiers termes de cette suite est donnée par la formule :

- si $q = 1$, $S' = \left(1^{\text{er}}\text{terme}\right) \times (\text{nombre de termes})$;
- si $q \neq 1$, $S' = \left(1^{\text{er}}\text{terme}\right) \times \left(\frac{1-q^{(\text{nombre de termes})}}{1-q}\right)$.