Fiche

Alors que les fonctions sont utilisées pour décrire les phénomènes continus, les suites permettent de décrire les phénomènes discontinus, aussi appelés « discrets » ; les suites sont en effet des fonctions sur l'ensemble des entiers naturels, à valeurs réelles. Autrement dit, la variable, que l'on note n plutôt que x et que l'on appelle indice ou rang de la suite, est un entier naturel. L'image associée, que l'on appelle terme général de la suite, est un réel noté U_n (ou V_n, W_n, etc.).
Les suites jouent un rôle essentiel, en informatique notamment et d'une manière générale dans toutes les procédures itératives.

1. Quels sont les différents modes de génération d'une suite ?

Il y a deux manières de définir une suite (U_n).

• De manière explicite : pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on définit le terme général U_n en fonction du rang n. Par exemple $u_n = 2n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, définit la suite (u_n).

• Par récurrence : un certain nombre des premiers termes de la suite étant donnés, le terme général U_n est défini en fonction des termes qui le précèdent. Dans ce cas, pour calculer un terme, il faut avoir déterminé tous les précédents.
Très souvent une suite sera définie par son premier terme et une formule permettant de calculer un terme en fonction du terme précédent. Par exemple $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$.

Exercice n°1

Exercice n°2

2. Quel algorithme pour calculer les termes d'une suite récurrente ?

Dans le cas d'une suite récurrente, le calcul des termes peut être facilité par l'utilisation d'un algorithme.
Exemple : Calculer les 11 premiers termes d'une suite de premier terme U_0 et de relation de récurrence Un_{+1}= A × U_n + B.
Algorithme
Variables A, B, X : nombres réels
N compteur : nombre entier
Début
Écrire « A = »
Lire A
Écrire « B = »
Lire B
Écrire « U_0 = »
Lire X
Pour N de 1 **jusqu'à** 10
Faire
Écrire N
X ← A*X + B
Écrire X
FinFaire
Fin
Sur TI 82
Input A
Input B
Input X
For (N, 1, 10, 1)

```
Disp N
A*X + B → X
Disp X
Pause
End
```

Sur Graph 25

```
? → A
? → B
? → X
```

For 1 → N to 10 step 1

```
N
◢

A*X + B → X
◢
```

Next

Exercice n°3

Exercice n°4

3. Comment étudie-t-on le sens de variations d'une suite ?

• Une suite (u_n) est croissante si, pour tout $n \in$
$\mathbb{N}$
, $U_{n+1} \geq U_n$. Une suite (u_n) est décroissante si, pour tout $n \in$
$\mathbb{N}$
, $U_{n+1} \leq U_n$. Une suite monotone est une suite qui est soit croissante, soit décroissante.
De nombreuses suites ne sont pas monotones, par exemple la suite (u_n) définie par la donnée de son terme général $U_n = \cos n$.

• Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on étudie le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$ pour tout $n \in$
$\mathbb{N}$
.
Si la suite (U_n) est définie de manière explicite par $U_n = f(n)$, alors le sens de variation de la suite (U_n) est le même que celui de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

Exercice n°5

Exercice n°6

4. Comment détermine-t-on la limite d'une suite ?

La limite d'une suite - si elle existe - est celle de son terme général U_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour prouver qu'une suite admet une limite et trouver celle-ci, on peut parfois utiliser les théorèmes d'encadrement - dont le théorème des gendarmes - valables pour les fonctions. En effet les opérations et propriétés sur les limites de fonctions en $+\infty$ sont également valables pour les suites.

De plus, si une suite est définie de manière explicite, alors sa limite est celle de la fonction associée en $+\infty$. Par exemple, la suite (U_n) définie pour tout $n \in$
$\mathbb{N}$
* par $U_n = -n^2 + \frac{2}{n}$ a pour limite $-\infty$ car la fonction associée f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = -x^2 + \frac{2}{x}$ a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
En revanche, si une suite est définie par récurrence, alors sa limite - si elle existe - n'est pas nécessairement celle de la fonction associée en $+\infty$. Par exemple, la suite (U_n) définie par :
$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{4} \\ U_{n+1} = U_n^2 + \frac{1}{4},\ \textit{pour tout } n \in N \end{cases}$ a une limite égale à $\frac{1}{2}$. Et pourtant, la fonction associée f définie pour tout $x \in$
$\mathbb{R}$
par $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice n°7

5. Qu'est-ce qu'une suite convergente ? divergente ?

Une suite est dite convergente si elle admet une limite finie (c'est-à-dire un réel).
Une suite est dite divergente, soit si elle n'admet pas de limite (comme par exemple $U_n = \sin n$, $U_n = \cos n$, $U_n = (-1)^n$, etc.), soit si elle admet une limite infinie, c'est-à-dire $+\infty$ ou $-\infty$ (comme, par exemple,
$U_n = n^2$
).

Exercice n°8

À Retenir

• Il y a deux manières de définir une suite :
- explicitement quand le terme général est donné en fonction du rang ;
- par récurrence quand le terme général est donné en fonction du ou des précédents, il est alors nécessaire de connaître le ou les premiers termes.

• Pour étudier le sens de variation d'une suite, on étudie le signe de la différence entre un terme quelconque et le terme précédent. On peut aussi, uniquement dans le cas où la suite est définie de manière explicite, étudier le sens de variations de la fonction associée sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

• La limite d'une suite est la limite du terme général lorsque le rang tend vers $+\infty$. Elle se calcule de la même manière que pour les fonctions. Si cette limite existe et est un réel, alors la suite est dite convergente. Elle est dite divergente soit lorsque cette limite existe et est infinie, soit lorsque cette limite n'existe pas.