Fiche

Le concept de dérivée n'a été dégagé qu'il y a environ trois siècles. Il est lié, en mathématiques, à la notion de tangente à une courbe, et en sciences physiques, à celle de vitesse instantanée d'un mobile. Les calculs de dérivées ont de nombreuses applications : ils permettent de déterminer les variations d'une fonction, de résoudre des problèmes d'optimisation, de calculer certaines limites, etc.

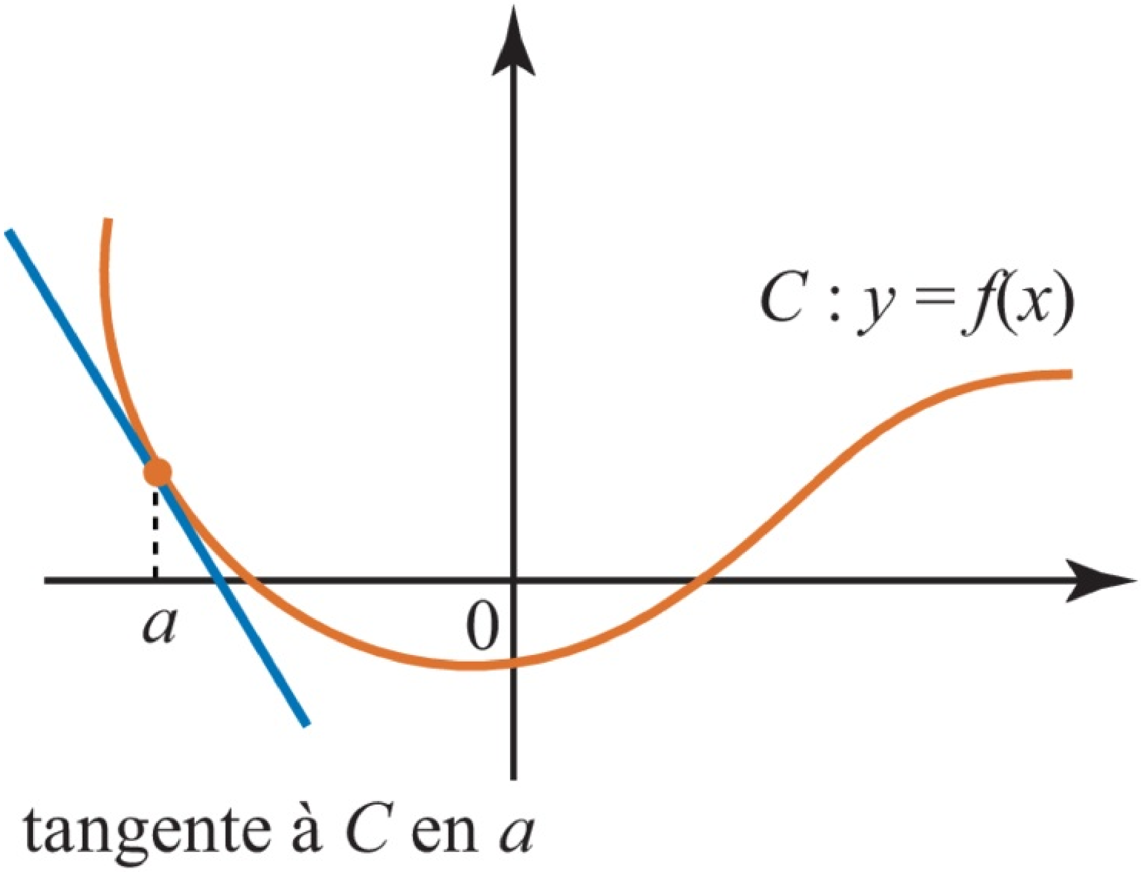
1. Comment définir le nombre dérivé d'une fonction en un réel ?

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert et a un réel appartenant à I.
On dit que **f est dérivable en a** si **le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie** quand x tend vers a. Dans ce cas, ce réel est appelé le nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$:
$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exercice n°1

2. Que représente le nombre dérivé d'une fonction en un réel ?

Lorsqu'une fonction f est dérivable en un réel a d'un intervalle ouvert I, le nombre dérivé de f en a, $f'(a)$, est le **coefficient directeur de la tangente** à C, la courbe représentative de f, au point d'abscisse a de C.



Exercice n°2

Exercice n°3

3. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe d'une fonction, en un point ?

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, dérivable en un réel a de I. On note T la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.
Par définition, T est une droite de coefficient directeur $f'(a)$. De plus, T passe par le point $\mathrm{A}(a\,;\,f(a))$.
En traduisant ces deux conditions, on obtient l'équation de T : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Exercice n°4

4. Existe-t-il des fonctions non dérivables en a ?

Exemple 1 :

Étudions la dérivabilité de la fonction racine carrée en 0.

On considère la fonction f définie sur
$\mathbb{R}$
$^+$ par f(x) = $\sqrt{x}$.

Pour cela, on étudie la limite du taux d'accroissement de f entre 0 et 0 + h :

$\lim_{h\to0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}$

$= \lim_{h\to0} \frac{\sqrt{h}}{h}$

$= \lim_{h\to0} \frac{1}{\sqrt{h}}$

$= +\infty$

La limite n'est pas un nombre réel fini. La fonction racine carrée n'est donc pas dérivable en 0. Cependant, la courbe admet, au point d'abscisse 0, une demi-tangente verticale.

Exemple 2 :

Étudions la dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0.

On considère la fonction f définie sur
$\mathbb{R}$
par f(x) = | x |.

$\lim_{h\to0} \frac{|0+h|-|0|}{|h|} = \lim_{h\to0} \frac{|h|}{h}$

Or, la quantité $\frac{|h|}{h}$ n'a pas de limite en 0. En effet :

$\lim_{\substack{h\to0\\h>0}} \frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h\to0\\h>0}} \frac{|h|}{h} = 1$ et $\lim_{\substack{h\to0\\h<0}} \frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h\to0\\h<0}} \frac{|h|}{h} = -1$

(Les limites à gauche et à droite sont différentes...)

Le taux d'accroissement de la fonction f entre 0 et 0 + h n'a pas de limite en 0. Par conséquent la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Cependant, elle est dérivable "à droite" de 0 et "à gauche" de 0.

La courbe admet donc deux demi-tangentes distinctes de coefficients directeurs respectifs 1 et –1

Exercice n°5

5. Qu'est-ce que la fonction dérivée d'une fonction dérivable sur un intervalle ?

• Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.

On dit que f **est dérivable sur** I lorsque f est dérivable en tout réel x de I.

• Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

La fonction qui, à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée la **fonction dérivée** de f sur I. Elle est notée f'.

Exercice n°6

Exercice n°7

À retenir

• Une fonction f, définie sur un intervalle ouvert contenant un réel a, est dérivable en a si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a. Ce réel est alors noté $f'(a)$ et appelé le « nombre dérivé de f en a ».

• Dans ce cas, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a. Cette tangente a alors pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

• Si une fonction f est définie et dérivable en tout réel x d'un intervalle ouvert I, alors la fonction qui, à tout $x \in I$, associe $f'(x)$ est la fonction dérivée de f sur I, elle est notée f'.