Fonctions polynomiales du second degré

Fiche

Les fonctions trinômes du second degré ont pour représentation graphique une parabole. Leur étude permet de connaître leur sens de variation, leur maximum ou minimum et la position de leur courbe par rapport à l'axe des abscisses. Ces propriétés se retrouvent algébriquement grâce à la résolution d'équations et d'inéquations du second degré que l'on met au point de manière systématique en classe de première.

1. Qu'est-ce qu'une fonction trinôme du second degré ?

• C'est une fonction f définie sur
$\mathbb{R}$
par :
$f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois réels et $a \neq 0$.

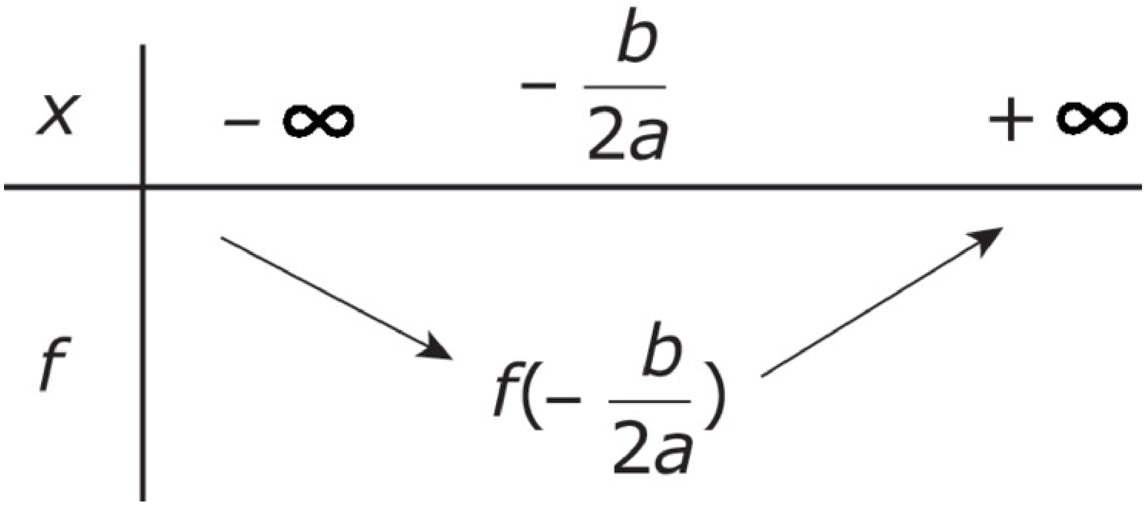
• Lorsque f est mise sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où α et β sont des réels dépendants de a, b et c, on dit que f est sous une **forme canonique**.

Exercice n°1

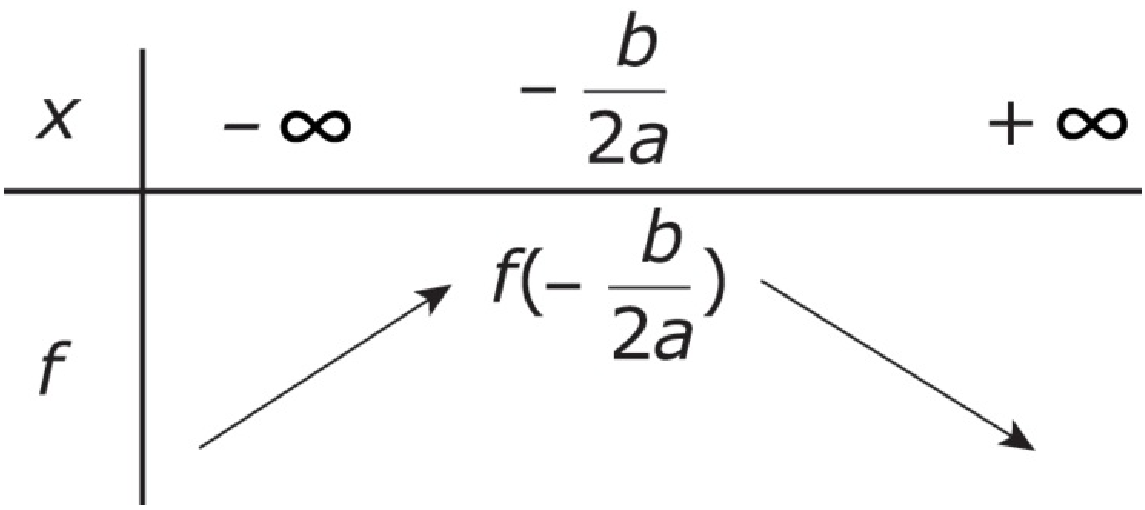
2. Quel est le sens de variation d'une fonction trinôme du second degré ?

• La forme canonique de $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$, permet de montrer les résultats suivants :

si $a > 0$



si $a < 0$



• La courbe de f dans un repère du plan est une **parabole** ayant pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ et pour sommetle point $S\left(-\frac{b}{2a}\ ;\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

3. Comment résout-on une équation du second degré du type $ax^2 + bx + c = 0$, où a est non nul ?

• Si $c = 0$, on factorise
$ax^2 + bx$
par x et on est ramené à un produit de facteurs nuls.
Si $b = 0$, l'équation
$ax^2 + c = 0$
se ramène à l'équation $x^2 = \frac{-c}{a}$ qui se résout facilement selon les signes de c et a.
Si
$ax^2 + bx + c$
est une identité remarquable évidente, on factorise le trinôme et on est ramené à un produit de facteurs nuls.

• Dans les autres cas, la forme canonique de $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$, permet de montrer qu'en calculant le **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$ du trinôme
$ax^2 + bx + c$
, on a :
- si $\Delta < 0$,
$ax^2 + bx + c = 0$
n'a pas de solution dans
$\mathbb{R}$
;
- si $\Delta = 0$,
$ax^2 + bx + c = 0$
a pour unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$;
- si $\Delta > 0$,
$ax^2 + bx + c = 0$
a deux solutions distinctes :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exercice n°2

• Démonstration :
On $aax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$
- Si $\Delta < 0$ alors $-\frac{\Delta}{4a} > 0$ et ainsi $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} > 0$ donc $ax^2 + bx + c > 0$ donc l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution réelle.
- Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Ainsi l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à l'équation $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$
$\Leftrightarrow a = 0 OU \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ (or $a \neq 0$)
$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$
$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 OU x + \frac{b}{2a} = 0$
$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$
L'équation de départ $ax^2 + bx + c = 0$ admet donc une seule solution $-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors $\frac{\Delta}{4a} > 0$.
On a $ax^2 + bx + c = 0$
$\Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$
$\Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$
$\Leftrightarrow a = 0$ ou $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$. Or $a \neq 0$.
$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$
...
$S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

4. Quel algorithme pour résoudre une équation du second degré ?

Algorithme
Variables a, b, c , D, x, y : nombres réels
Début
Lire a, b, c
D ← b^2 – 4ac
Écrire D
Si D < 0 **Alors**
Écrire « Pas de solution »
Sinon
$x \leftarrow (-b - \sqrt{D})/(2a)$

Écrire x

y ← $(-b + \sqrt{D})/(2a)$

Écrire y

Fin Si

Fin

Sur TI 82

Input A

Input B

Input C

B^2 – 4*A*C Sto D

Disp D

If D < 0

Then

Disp "PAS DE SOLUTION"

Else $(-B + \sqrt{D})/(2A) \rightarrow$ X Ifend

Disp X

$(-B + \sqrt{D})/(2A) \rightarrow$ Y

Disp Y

End

Sur Graph 25

? → A

? → B

? → C

B^2 – 4*A*C → D

◆

If D < 0

Then "PAS DE SOLUTION"

Else $(-B + \sqrt{D})/(2A) \rightarrow$ X

◆

$(-B + \sqrt{D})/(2A) \rightarrow$ Y

◆

```python
from math import sqrt

def resol(a,b,c):
    d=b**2-4*a*c
    if d>0:
        x1=(-b-sqrt(d))/(2*a)
        x2=(-b+sqrt(d))/(2*a)
        return x1,x2
    elif d==0:
        x0=(-b)/(2*a)
        return x0
    else:
        return "aucune solution réelle"
```

5. Comment détermine-t-on le signe d'un trinôme du second degré du type $ax^2 + bx + c$, où a est non nul ?

• Si l'équation
$ax^2 + bx + c = 0$
n'a pas de solution dans
$\mathbb{R}$

($\Delta < 0$), alors
$ax^2 + bx + c$
ne se factorise pas et est du signe de a pour tout réel x.

• Si l'équation
$ax^2 + bx + c = 0$
a une unique solution x_0 ($\Delta = 0$), alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ et est du signe de a pour tout $x \in$
$\mathbb{R}$
$- \{x_0\}$ et nul en x_0.

• Si l'équation
$ax^2 + bx + c = 0$
a deux solutions distinctes x_1 et x_2 ($\Delta > 0$), alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, et un tableau de signes donne le résultat suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Remarque

On résout ainsi tout type d'inéquation du second degré.

Exercice n°4

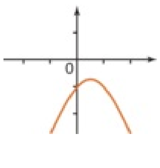
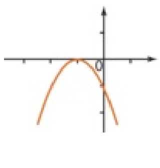
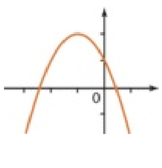
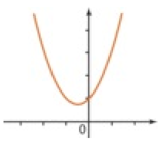
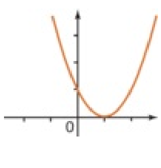
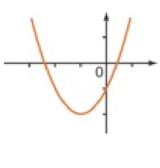
Exercice n°5

Exercice n°6

6. Quel est le lien entre les solutions d'une équation ou inéquation du second degré et l'allure de la parabole associée ?

• Soit f la fonction définie sur
$\mathbb{R}$
par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Résoudre l'équation
$ax^2 + bx + c = 0$
revient à lire graphiquement les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses.

• Le signe de
$ax^2 + bx + c$
est lié à la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.
Voici les différents cas possibles :

$a < 0$ et $\Delta < 0$	$a < 0$ et $\Delta = 0$	$a < 0$ et $\Delta > 0$
		
$a > 0$ et $\Delta < 0$	$a > 0$ et $\Delta = 0$	$a > 0$ et $\Delta > 0$
		

Exercice n°7

Exercice n°8

À retenir

• Toute fonction trinôme du second degré du type $x \mapsto ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$, a pour représentation graphique une parabole de sommet S $\left(-\frac{b}{2a} ~;~ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, d'axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$, dont les branches sont « orientées vers le haut » si $a >$ 0 et « orientées vers le bas » si $a <$ 0.

• Le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ du trinôme
$ax^2 + bx + c$
, où $a \neq 0$, donne le nombre de solutions à l'équation
$ax^2 + bx + c = 0$
et permet de savoir si le trinôme est factorisable ou non :
- si $\Delta >$ 0, $ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$, où $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta =$ 0, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ où $x_0 = -\frac{b}{2a}$;
- si $\Delta <$ 0,
$ax^2 + bx + c$
ne se factorise pas, et est du signe de a sur
$\mathbb{R}$
.