Variables aléatoires discrètes

Fiche

Nous allons définir ici des fonctions sur les événements élémentaires, ce qu'on appelle des variables aléatoires. On définit pour ces variables aléatoires leur loi de probabilité et on leur associe un nombre appelé espérance mathématique, qui est à une variable aléatoire ce qu'est la moyenne pour des variables statistiques.

1. Comment reconnaître une variable aléatoire ?

On considère E une expérience aléatoire et Ω l'univers associé.
Une **variable aléatoire** X est simplement une application qui à tout événement élémentaire de l'univers associe un nombre réel.
Autrement dit, X est une fonction : $\Omega \to$
$\mathbb{R}$
.

Remarques

• L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega)$.
On se limite dans ce chapitre au cas où $X(\Omega)$ est un ensemble fini de nombres. C'est-à-dire au cas où $X(\Omega) = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$.

• Une expérience aléatoire dont les issues sont des nombres peut être vue comme une variable aléatoire, dans ce cas : $X(\Omega) = \Omega$.

Exemples

• On jette un dé, l'ensemble des issues possibles est {1, 2, 3, 4, 5, 6}. On peut considérer la variable aléatoire X qui, au jet du dé, associe le nombre obtenu. On a $X(\Omega) = \Omega$(voir la remarque précédente).

• On jette deux dés : un dé rouge et un dé blanc. Ω, l'univers associé à cette expérience, est l'ensemble des couples formés par le résultat du dé rouge et le résultat du dé blanc. Par exemple : (2 ; 3) signifie que l'on a obtenu 2 avec le dé rouge et 3 avec le dé blanc. Le nombre d'éléments de Ωest 36. On considère la variable aléatoire X définie comme la somme des points obtenus, c'est la variable aléatoire qui, au résultat (2 ; 3), associe le nombre 5. On a alors : $X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Exercice n°1

Exercice n°2

2. Comment établir la loi de probabilité d'une variable aléatoire ?

• Soit X une variable aléatoire, dont l'ensemble des valeurs prises est $X(\Omega) = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$.
La loi de probabilité de X est simplement la donnée, pour chaque x_i, de la probabilité p_i de l'événement $(X = x_i)$ constitué de tous les événements élémentaires dont l'image par X est x_i.
On la présente généralement sous la forme d'un tableau :

X	x_1	x_2	...	x_n	
P	p_1	p_2	...	p_n	1

Les nombres p_i vérifient les conditions : $0 \leq p_i \leq 1$ avec $p_i = P(X = x_i)$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

• Dans la pratique, on suit plus ou moins cette démarche. On regarde d'abord l'image d'événements élémentaires, puis on détermine $X(\Omega)$. Enfin, pour chaque x_i, on calcule la probabilité p_i de l'événement $(X = x_i)$.

Exemples

On jette une pièce deux fois de suite. C'est l'expérience aléatoire. L'univers associé est $\Omega = \{FF,\ FP,\ PF,\ PP\}$, où FP signifie face au premier lancer et pile au deuxième.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque événement élémentaire, associe le nombre de « face » obtenues. (Donc X associe à FF le nombre 2, à FP le nombre 1, etc.) Les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2. La loi de probabilité de X est :

X	0	1	2	
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

Par exemple *P(X = 1)* est la probabilité des événements élémentaires dont le nombre de « face » est 1, c'est la probabilité des événements FP et PF.
$P(X = 1) = P(\text{FP} \cup \text{PF}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ se traduit ici par : $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$.

Exercice n°3

Exercice n°4

Exercice n°5

Exercice n°6

3. Comment calculer l'espérance d'une variable aléatoire ?

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par $p_i = P(X = x_i)$, pour $1 \leq i \leq n$.
Autrement dit, la loi de X est :

X	x_1	x_2	...	x_n	
P	p_1	p_2	...	p_n	1

L'espérance de X est le nombre réel noté *E(X)* qui est défini par :
$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$.

Remarques

• L'espérance est la « moyenne » des valeurs prises par X lors d'un grand nombre de répétitions de l'expérience. En effet, si on répète l'expérience et qu'à chaque fois on note la valeur obtenue, la moyenne de ces valeurs tend vers *E(X)* quand le nombre de répétitions tend vers l'infini.

• L'espérance est comprise entre la plus petite et la plus grande valeur de *X*.

• Si l'on ajoute la valeur *k* à toutes les valeurs de *X*, on ajoute *k* à *E(X)*. Si l'on multiplie par *k* toutes les valeurs de *X*, on multiplie *E(X)* par *k*.

Exercice n°7

Exercice n°8

4. Comment calculer la variance d'une variable aléatoire ?

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par $p_i = P(X = x_i)$, pour $1 \leq i \leq n$.
Autrement dit, la loi de X est :

X	x_1	x_2	...	x_n	
P	p_1	p_2	...	p_n	1

La **variance** de X est le nombre réel, noté *V(X)*, défini par :
$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i$, soit
$V(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \ldots + (x_n - E(X))^2 p_n$
L'**écart type** de X est le nombre réel, noté $\sigma(X)$, défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarques

• La variance mesure la dispersion de la loi de probabilité autour de l'espérance. On démontre que la probabilité d'obtenir une valeur de X comprise entre *E(X) - V(X)* et *E(X) + V(X)* est supérieure à 75 %.
La variance est toujours une valeur positive ou nulle.

• Si l'on ajoute la valeur k à toutes les valeurs de X, on ne change pas $V(X)$. Si l'on multiplie par k toutes les valeurs de X on multiplie $V(X)$ par k^2.

• On peut utiliser, pour calculer la variance, la formule suivante :
$V(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i\right) - E(X)^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_n^2 p_n - E(X)^2$.

Exemple

Soit la variable aléatoire X de loi :

X	1	2	3	4	5	
P	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2	1

Alors : $E(X) = 1 \times 0,1 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,4 + 4 \times 0,1 + 5 \times 0,2 = 3,1$.
$V(X) = (1 - 3,1)^2 \times 0,1 + (2 - 3,1)^2 \times 0,2 + (3 - 3,1)^2 \times 0,4 + (4 - 3,1)^2 \times 0,1 + (5 - 3,1)^2 \times 0,2 = 1,49$

Exercice n°9

Exercice n°10

5. Que deviennent l'espérance et la variance par changement de variable aléatoire $Y = aX + b$?

Exemple : L'organisateur d'une tombola édite dix mille billets. Dix gagnent un lot à 1 000 €, cent gagnent un lot à 100 €. On achète un billet au hasard et on appelle X la variable aléatoire égale au montant du lot.
$E(X) = 1000 \times \frac{10}{10\,000} + 100 \times \frac{100}{10\,000} = 1 + 1 = 2$;
$V(X) = (1000 - 2)^2 \times 10 + (100 - 2)^2 \times 100 + (0 - 2)^2 \times 9890 = 10\,960\,000$
Un billet coûte 3 € et 5 % sont prélevés sur le montant du lot pour une organisation caritative. Si Y est la variable égale au gain alors $Y = X - 3 - 0,05X = 0,95X - 3$.
Soit $Y = \{0,95 \times 1000 - 3\,; 0,95 \times 100 - 3; 0,95 \times 0 - 3\} = \{947\,; 92; -3\}$
$E(Y) = 947 \times \frac{10}{10\,000} + 92 \times \frac{100}{10\,000} - 3 \times \frac{9890}{10\,000} = 1,1 = 0,95 \times 2 - 3$;
$V(Y) = (947 + 1,1)^2 \times 10 + (92 + 1,1)^2 \times 100 + (-3 + 1,1)^2 \times 9890 = 9891400 = 0,95^2 \times 10960000$.
Plus généralement : Pour a et b réels :
$E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
D'où l'égalité sur les écarts-types : $\sigma(aX + b) = \sqrt{a^2 V(X)} = |a|\sigma(X)$.

Exercice n°11

6. Quels sont les algorithmes à maîtriser ?

Calculer l'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète :
Soit X une variable aléatoire discréte qui prend pour valeurs x_1, x_2... x_n. On note p_i la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$. On note E(X) l'espérance mathématique de X et σ(X) l'écart-type de X.

```
def esperance(valeurs,probabilites):
    e=0
    a= len(valeurs)
    for i in range(a):
        e = e + probabilites[i]*valeurs[i]
    return e
```

L'utilisateur devra entrer les valeurs sous la forme d'une liste de telle manière [x_1, x_2 ... x_n]. De même pour les probabilités [p_1, p_2 ... p_n].
Calculer l'écart-type d'une variable aléatoire discrète :

```python
def variance(valeurs,probabilites):
    var,N = 0,0
    e=esperance(valeurs,probabilites)
    n=len(valeurs)
    for i in range(n):
        var = var+probabilites[i]*(valeurs[i]-e)**2
    return var

def ecarttype(valeurs,probabilites):
    return sqrt(variance(valeurs,probabilites))
```

Comment simuler une variable aléatoire discrète à l'aide du module random ?

```python
def simul(valeurs,probabilites):
    nb=random.random()
    pcumul=0
    for i in range(len(valeurs)):
        if pcumul<=nb<pcumul+probabilites[i]:
            return valeurs[i]
        pcumul=pcumul+probabilites[i]
```

Comment simuler un échantillon de taille n d'une variable aléatoire discrète ?

```python
def echantillon(valeurs,probabilites,taille):
    ech=[]
    for j in range(taille):
        ech.append(simul(valeurs,probabilites))
    return ech
```

Comment analyser un échantillon de taille n d'une variable aléatoire discrète ?
On peut par exemple calculer la moyenne des réels constituants l'échantillon

```python
def moyenne(valeurs,probabilites,taille):
    return sum(echantillon(valeurs,probabilites,taille))/taille
```

On peut aussi mesurer la distance entre E(X) et la moyenne observée dans l'échantillon

```python
def distance(valeurs,probabilites,taille):
    return abs(moyenne(valeurs,probabilites,taille)-esperance(valeurs,probabilites))
```

Enfin on peut calculer si on simule N échantillons de taille n, la proportion des échantillons dans lesquels la distance entre E(X) et la moyenne observée dans l'échantillon est inférieure ou égale à $\frac{2\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.

```
def proportion(valeurs,probabilites,taille,nbdechantillon):
    prop=0
    for i in range(nbdechantillon):
        if distance(valeurs,probabilites,taille)<=2*ecarttype(valeurs,probabilites)/sqrt(taille):
            prop=prop+1
    return prop/nbdechantillon
```

Exercice n°13

Exercice n°14

À retenir absolument

• Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire, on commence par déterminer $X(\Omega)$, puis pour chaque x_i, on calcule $p_i = P(X = x_i)$.

• L'espérance de X est $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$.

La variance de X est $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \ldots + (x_n - E(X))^2 p_n$.

Pour $a \in R$ et $b \in R$: $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

© 2000-2024, rue des écoles