Sujet zéro, épreuve commune, sujet 3, des instruments, des notes et des gammes, 2020

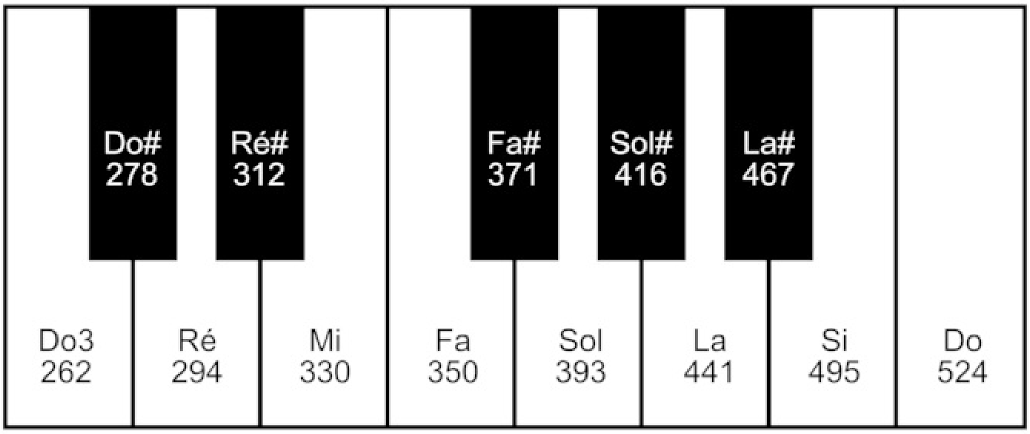
Énoncé

Les instruments de musique produisent des sons auxquels l'oreille humaine associe certaines caractéristiques : hauteur, timbre et intensité. La répartition des notes dans une gamme a été retenue pour qu'elles sonnent de manière harmonieuse les unes par rapport aux autres. La recherche de cette harmonie a conduit à différents types de gammes, des gammes dites de Pythagore aux gammes tempérées.

Le sujet est composé de deux parties largement indépendantes.

Partie 1 : Des instruments et des notes

Les cordes d'un piano vibrent lorsqu'elles sont frappées par de petits marteaux actionnés par les touches du clavier. Les sons produits par le piano résultent de ces vibrations.



1. Calculer la fréquence associée au La_4 situé une octave au-dessus du La_3.

Lorsqu'on passe d'une octave à la suivante, le rapport de leur fréquence est égal à 2.

2. On s'intéresse aux sons produits par ce piano. Un système d'acquisition informatisé permet l'enregistrement et la visualisation des signaux associés à ces sons.

Document 2. Signaux enregistrés correspondant à des notes de musique jouées par un piano.

Figure 1.
Signal sonore en fonction du temps. Une graduation horizontale correspond à 1,0 ms

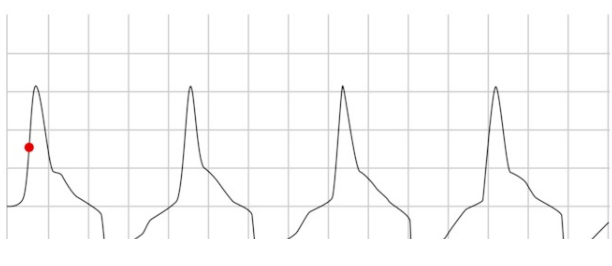
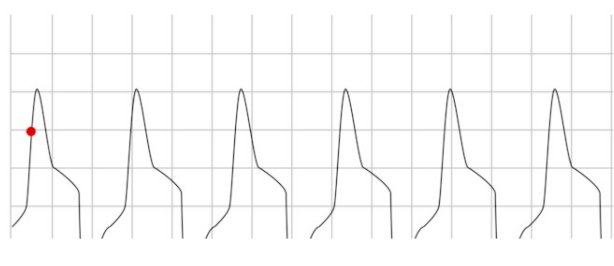
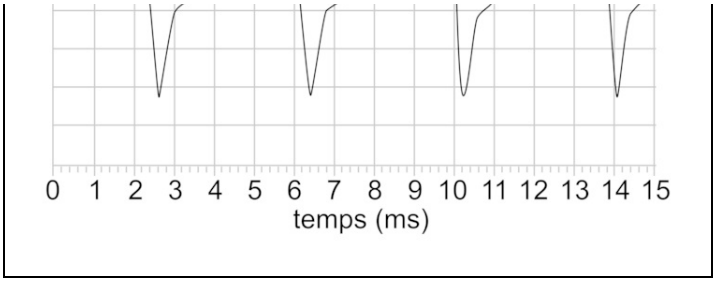
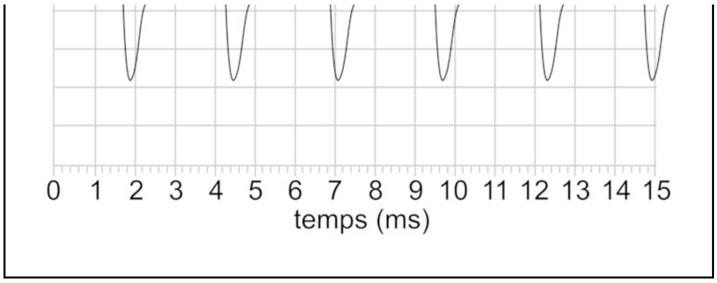


Figure 2.
Signal sonore en fonction du temps. Une graduation horizontale correspond à 1,0 ms







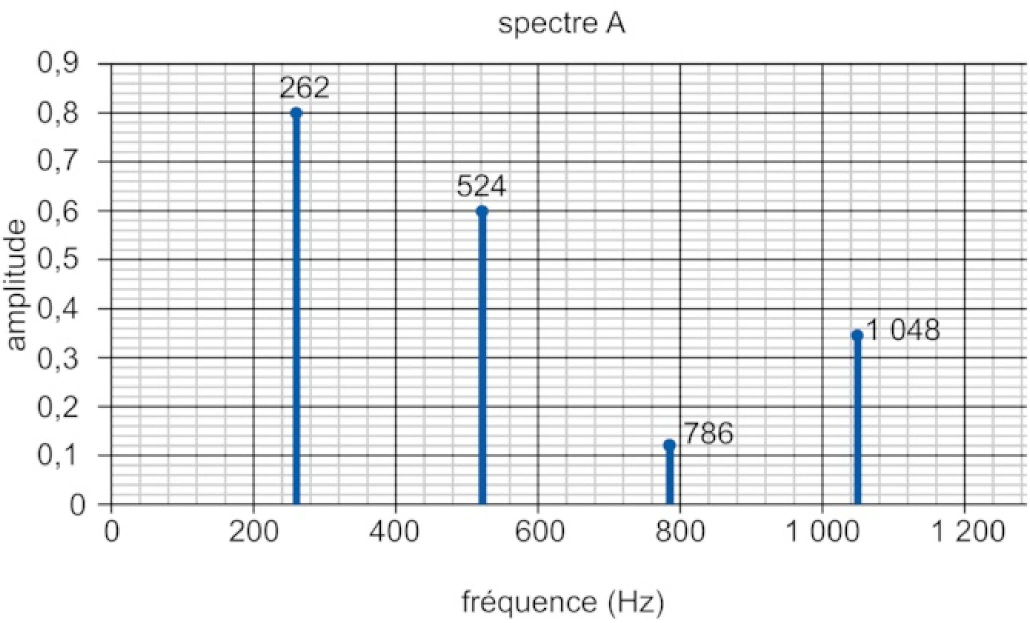
2. 1. Justifier que les figures 1 et 2 correspondent à deux notes différentes.

Deux mêmes notes ont la même fréquence.

2. 2. Identifier les notes correspondant aux figures 1 et 2.

Pour identifier les notes, il faut déterminer leur fréquence et donc leur période. Pour une meilleure précision, il vaut mieux mesurer plusieurs périodes.

3. L'analyse spectrale permet, après une acquisition informatisée et un traitement numérique, de révéler la « signature acoustique » d'un son en faisant apparaître l'amplitude de ses différentes composantes en fréquence.



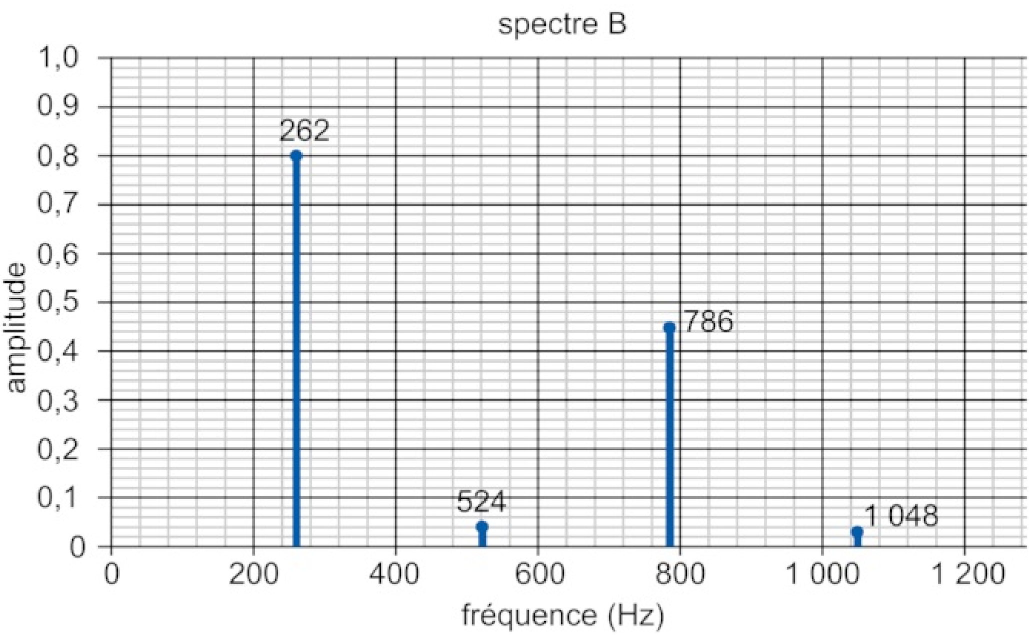


Figure 3.

Spectres de sons produits par deux instruments de musique (fréquence de chaque composante indiquée en hertz)

3. 1. Ces deux sons ont-ils la même hauteur ? L'oreille humaine peut-elle les différencier ?

La hauteur d'un son correspond à la fréquence de son fondamental.

3. 2. Le spectre a correspond à l'un des sons produit par un piano étudiés dans la question 2. Associer ce spectre à l'un des deux signaux du document 2.

La fréquence du fondamental d'un son correspond à la fréquence de la note produite. Utiliser les questions précédentes pour associer le spectre au signal du document 2.

Partie 2 : Des notes et des gammes

La théorie musicale étant fondée sur des rapports de fréquences, on décide de simplifier les calculs en attribuant la valeur 1 (sans unité) à une fréquence choisie comme référence. Celle-ci correspond à une note de référence (par exemple 262 Hz pour le Do_3). On retrouve ensuite les fréquences réelles en multipliant les valeurs calculées par la fréquence de la note de référence.

La construction des gammes dites de Pythagore est basée sur le cycle des quintes : on part de la fréquence de valeur $f_0 = 1$. On construit une nouvelle fréquence, la quinte, en multipliant f_0 par $\frac{3}{2}$. On réitère ce processus pour obtenir la quinte de la quinte, et ainsi de suite. À certaines étapes, le fait de multiplier par $\frac{3}{2}$ une fréquence comprise entre 1 et 2 peut donner une fréquence supérieure ou égale à 2. On se propose de démontrer que, si on divise par 2 la valeur obtenue, on la ramène dans l'octave.

4.

On suppose que 1
$\leqslant$
$f < 2$ et on raisonne par disjonction de cas :

- premier cas : $1 \leq f < \frac{4}{3}$. Montrer que $1 \leq \frac{3}{2} \times f < 2$;
- deuxième cas : $\frac{4}{3} \leq f < 2$. Montrer que $2 \leq \frac{3}{2} \times f$ et $1 \leq \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} f < 2$.

Utiliser chaque inégalité donnée, en transposant des coefficients on obtiendra les inégalités à démontrer.

5. L'algorithme suivant permet de calculer les fréquences des notes successivement obtenues par ce processus jusqu'à ce qu'on retombe sur la fréquence initiale.

$f \leftarrow 1$
$f \leftarrow \frac{3}{2} \times f$
$n \leftarrow 1$
Tant que $f \neq 1$ faire
n ← n + 1
$f \leftarrow f \times \frac{3}{2}$
Si f
$\geqslant$
2 alors $f \leftarrow f \times \frac{1}{2}$
Fin Si
Fin Tant que

Recopier et compléter le tableau ci-dessous en donnant les valeurs des 12 premières quintes obtenues par cet algorithme. Les résultats seront donnés d'abord sous forme exacte comme quotients d'une puissance de 2 par une puissance de 3, puis par leurs valeurs décimales approchées au centième obtenues à l'aide de la calculatrice.

Numéro de la note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence (fraction irréductible)	1	$\frac{3}{2}$				$\frac{3^5}{2^7}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3^7}{2^{11}}$		$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{3^{12}}{2^{19}}$
Fréquence (valeur approchée à 10^{-2} près)	1	1,5				1,9	1,42	1,07		1,20	1,80	1,35	1,01

Chaque note suivante a une fréquence dont la valeur est calculée par l'algorithme donné.

6. L'algorithme termine-t-il pour une valeur de n inférieure ou égale à 12 ?

Analyser la condition dans le « tant que » puis la comparer au tableau de valeurs calculées précédemment.

7.

Chacune des fréquences calculées est obtenue à partir de 1 par multiplications successives par $\frac{3}{2}$ et parfois par $\frac{1}{2}$. Elles peuvent donc toutes s'écrire sous la forme $\frac{3^m}{2^n}$ où m et n sont des entiers naturels non nuls.

7. 1. Démontrer que l'égalité $\frac{3^m}{2^n} = 1$ est impossible.

Pour résoudre l'équation, faire un produit en croix et procéder par un raisonnement par l'absurde.

7. 2. Que peut-on en déduire pour l'algorithme proposé ci-dessus ?

Analyser de nouveau la condition de la boucle « tant que » avec la réponse à la question précédente.

8. D'après ce qui précède, le cycle des quintes ne « reboucle » jamais exactement sur la note de départ. En s'appuyant sur le tableau de la question 4, justifier le choix de 12 notes dans une gamme construite selon ce principe.

Analyser la valeur de la fréquence pour la douzième note.