Fiche

I. Comment prouver qu'une fonction est affine ?

• **Définition** : Soit une fonction numérique f définie sur un intervalle I. f est une fonction affine si et seulement s'il existe deux réels m et p tels que pour tout x de I, on a : $f(x) = mx + p$.

• Exemple : On considère un aquarium en verre dont la forme est un pavé droit. La base de ce pavé droit est un rectangle de longueur 35 cm et de largeur 15 cm. La hauteur du pavé droit est égale à 20 cm. On remplit l'aquarium d'eau très salée jusqu'à atteindre une hauteur de 2 cm. On souhaite maintenant verser de l'eau minérale non salée : on note x la hauteur d'eau minérale non salée versée en cm.

• Soit V la fonction qui a une hauteur x d'eau minérale non salée (en cm) associe le volume total d'eau présent dans l'aquarium (en cm^3).

• On rappelle que le volume d'un pavé droit de longueur l, de largeur L et de hauteur h est égal à $l \times L \times h$.

• On a $x \in [0; 18]$, car la hauteur de l'aquarium est égale à 20 cm et 2 cm d'eau salée ont déjà été versés. De plus un volume est une grandeur continue, donc x est bien un réel.

• Pour tout $x \in [0; 18]$, $V(x) = 35 \times 15 \times 2 + 35 \times 15 \times x = 1\,050 + 525\,x$.

• Ainsi V est une **fonction affine**, car pour tout x de $[0;18]$, $V(x) = mx + p$ avec $m = 525$ et $p = 1\,050$.

Exercice n°1

• Remarque : Les fonctions affines sont des outils pour modéliser des **phénomènes continus**. Ainsi des grandeurs comme le temps, une longueur, une aire, un volume, une température, une pression sont souvent considérées comme des grandeurs continues. C'est-à-dire que l'on peut être aussi précis que l'on veut (théoriquement) dans la mesure de la grandeur, il y a donc une infinité de valeurs possibles pour la variable, d'où un ensemble de définition qui est un intervalle (ou une réunion d'intervalles).

II. Comment construire la représentation graphique d'une fonction affine ?

On munit le plan d'un repère.

• Propriété : Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$. La représentation graphique de f est **une droite**.

- Remarque 1 : On dit qu'une fonction affine modélise **une évolution linéaire**.
- Remarque 2 : Si f est affine, mais son ensemble de définition est un intervalle fermé du type $[a ; b]$ avec a et b réels tels que $a < b$, alors la représentation graphique de f est **un segment**.

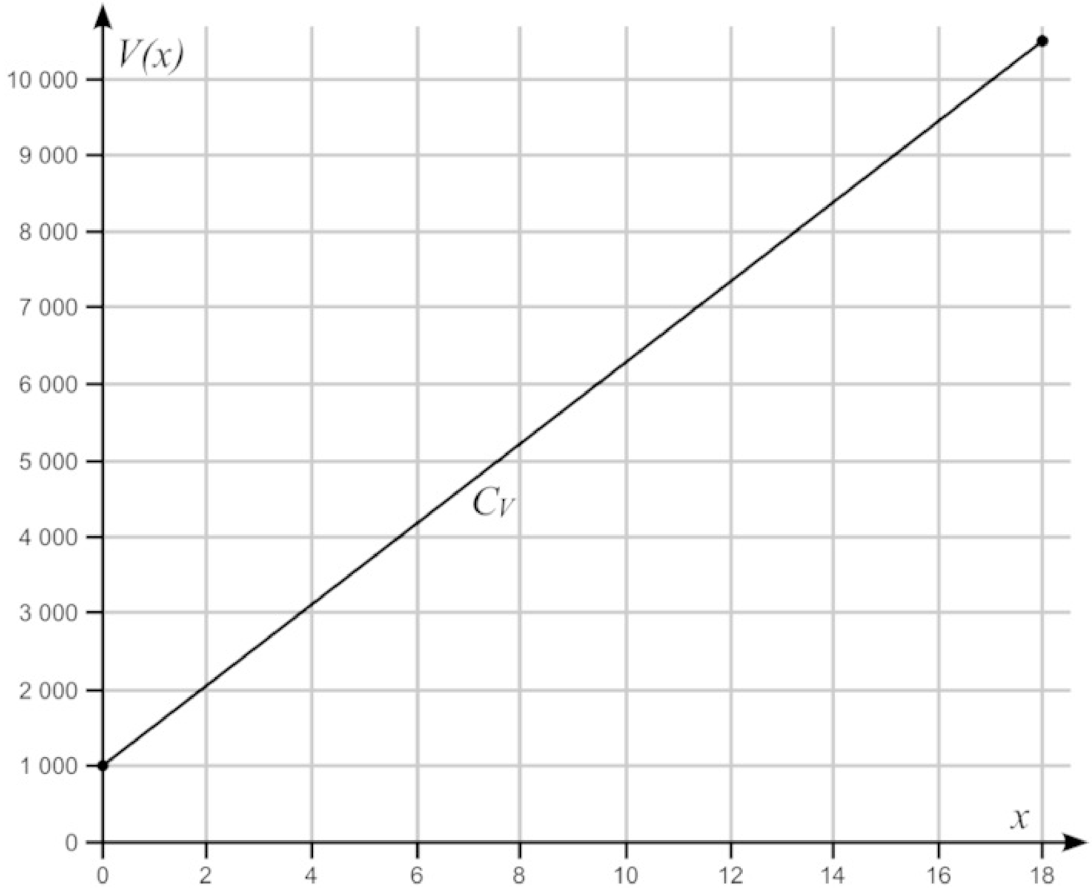
• Construction : Il suffit souvent de déterminer les coordonnées de deux points appartenant à la représentation graphique de f pour effectuer la construction.

• Exemple : Considérons la fonction affine V définie pour tout x de $[0;18]$ par : $V(x) = 525x + 1\,050$.

Comme V est définie sur un intervalle fermé, alors sa représentation graphique est un segment. Il est pratique de déterminer les coordonnées des extrémités de ce segment que l'on nommera C_V.
On calcule l'image de 0 par la fonction V, c'est-à-dire $V(0)$. $V(0) = 525 \times 0 + 1\,050 = 1\,050$.
Et $V(18) = 525 \times 18 + 1\,050 = 10\,500$. On a donc le tableau de valeurs suivant :

x	0	18
$V(x)$	1 050	10 500

• On place dans un repère les points $A(0\,;1\,050)$ et $B(18\,;10\,500)$, puis on trace le segment $[AB]$.



Exercice n°2

III. Comment étudier le sens de variation d'une fonction affine ?

Soit I un intervalle. Soit m et p deux réels.

• Propriété : Soit f une fonction affine définie pour tout x de I par $f(x) = mx + p$:

- si $m > 0$ alors f est strictement croissante sur I ;
- si $m < 0$ alors f est strictement décroissante sur I ;
- si $m = 0$ alors f est constante sur I.

• Exemple : Considérons la fonction affine V définie pour tout x de [0 ; 18] par : $V(x) = 525x + 1\,050$.
On a pour tout x de [0 ; 18] : $V(x) = mx + p$ avec $m = 525$ et $p = 1\,050$.
525 > 0 donc la fonction V est strictement croissante sur [0 ; 18].
On pouvait le conjecturer en observant que le segment C_v « monte ».

Exercice n°3

IV. Comment trouver le taux de variation d'une fonction affine entre deux réels ?

• **Définition générale** : Soit f une fonction numérique quelconque définie sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. Le taux de variation de f entre a et b est le nombre réel égal à :
$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
Soit m et p deux réels.

• Propriété : Soit f une fonction affine définie pour tout x de I par : $f(x) = mx + p$ (avec m et p deux réels). Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. Le taux de variation de f entre a et b est constant et égal au nombre m.

• Exemple : Considérons la fonction affine V définie pour tout x de [0 ; 18] par : $V(x) = 525x + 1\,050$.
On a pour tout x de [0 ; 18] : $V(x) = mx + p$ avec $m = 525$ et $p = 1\,050$.
Donc le taux de variation de V entre 1 et 8 est égal à 525.
Le taux de variation de V entre 2 et 15,5 est égal à 525.
Soient a et b deux réels de [0 ; 18] tels que $a < b$, alors le taux de variation de V entre a et b est égal à 525.

Exercice n°4

• Interprétation graphique : Soit f une fonction affine définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par : $f(x) = mx + p$ (avec m et p deux réels). La représentation graphique de f est une droite. On dit que cette droite a pour **coefficient directeur** le nombre m.

V. Comment résoudre un problème de seuil ?

• On peut être amené à devoir résoudre une inéquation du type
$mx + p \geqslant c$
(avec c un réel donné).

• Dans un premier temps : $mx + p \geq c \Leftrightarrow mx + p - p \geq c - p \Leftrightarrow mx \geq c - p$

• Dans un deuxième temps :
- si $m > 0$ alors :
$mx \geq c - p \Leftrightarrow \frac{mx}{m} \geq \frac{c-p}{m} \Leftrightarrow x \geq \frac{c-p}{m}$
- si $m < 0$ alors :
$mx \geq c - p \Leftrightarrow \frac{mx}{m} \leq \frac{c-p}{m} \Leftrightarrow x \leq \frac{c-p}{m}$

• Exemple : On considère un aquarium en verre dont la forme est un pavé droit.
La base de ce pavé droit est un rectangle de longueur 35 cm et de largeur 15 cm. La hauteur du pavé droit est égale à 20 cm. On remplit l'aquarium d'eau très salée jusqu'à atteindre une hauteur de 2 cm.
On souhaite maintenant verser de l'eau minérale non salée. On note x la hauteur d'eau minérale non salée versée en cm.
Soit V la fonction qui à une hauteur x d'eau minérale non salée (en cm) associe le volume total d'eau présent dans l'aquarium (en cm^3).
On a montré que pour tout x de $[0 ; 18]$, $V(x) = 525x + 1\,050$.
À partir de quelle hauteur d'eau minérale non salée versée aura-t-on un volume total d'eau strictement supérieur à 8 000 cm^3 ?

• On doit donc résoudre dans $[0 ; 18]$ l'inéquation :
- $V(x) > 8\,000$
- $525x + 1\,050 > 8\,000$
- $525x + 1\,050 - 1\,050 > 8\,000 - 1\,050$
- $525x > 6\,950$
- $\frac{525x}{525} > \frac{6\,950}{525}$
- $x > \frac{278}{21}$

• Ainsi l'ensemble solution (souvent noté S) est :
$S =]\frac{278}{21} ; 18]$
Et $\frac{278}{21} \approx 13,24$.

• À partir d'une hauteur versée d'eau minérale non salée environ égale à 13,24 cm, on aura le volume total d'eau dans l'aquarium qui sera strictement supérieur à 8 000 cm^3 .

Exercice n°5