Phénomènes d'évolution : suites arithmétiques

Fiche

I. Qu'est-ce qu'une suite ?

En seconde, le concept de fonction numérique a été défini.

• Lorsque l'on observe un **phénomène discret**, c'est-à-dire que des observations sont effectuées lors des étapes (première étape, deuxième étape, etc.), alors la fonction que l'on peut utiliser pour modéliser l'évolution du phénomène a son ensemble de définition qui est l'ensemble des entiers (ou une partie de $\mathbb{N}$).

• **Définition** : Une fonction numérique dont l'ensemble de définition est $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) est appelée **suite numérique**.

• Exemple : On s'intéresse à la consommation électrique (en MW) en France les journées de juin 2023 à 8 h. On va considérer la fonction c qui à x jours après le 1er juin associe la consommation électrique $c(x)$ en MW en France d'après le site rte-france.com. La variable étant entière et muette, on la note plus souvent n.
On a donc les égalités suivantes :

- $c(0) = 43464$
- $c(1) = 43237$
- etc.

L'ensemble de définition de la fonction c est $\mathbb{N}$ donc c est une suite.

• Notations :

- L'image de n par une suite u peut être notée $u(n)$, mais sera très souvent notée u_n.
- u_n est le $(n + 1)$ème terme de la suite u (si u est définie sur $\mathbb{N}$).
- Une suite u sera très souvent désignée par (u_n).

Exercice n°1

II. Comment démontrer qu'une suite est arithmétique ?

• **Définition** : On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est arithmétique de raison r (r un réel) si, et seulement si, pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} = u_n + r$. On dit que c'est une **relation de récurrence**.

• Exemple : Léonard a emprunté un capital de 3 000 € à sa grand-mère pour acheter un appartement. Pour le remboursement, il choisit de verser 1 % du capital initial de manière mensuelle. Il effectue son premier virement le 16 août 2023. On dit que les **intérêts versés sont simples** (même somme versée chaque mois). Pour tout entier naturel n, on note c_n le capital (en euros) restant à rembourser n mois après le 16 août 2023.

• Démontrons que la suite (c_n) est une suite arithmétique (et déterminons ses paramètres : premier terme et raison).
On a $c_0 = 3\ 000$ car il reste 3 000 euros (capital initial) à rembourser 0 mois après le 16/08/23.

• Calculons ce que représente 1 % du capital initial : $\frac{1}{100} \times 3\,000 = 30$. Léonard verse donc 30 € par mois.
(Ainsi $c_1 = c_0 - 30 = 3\ 000 - 30 = 2\ 970$).

• On a donc pour tout n de $\mathbb{N}$: $c_{n+1} = c_n - 30$.

• Donc la suite (c_n) est arithmétique de raison $r = -30$.

Exercice n°2

III. Quelle est l'expression du terme général d'une suite arithmétique ?

• Propriété 1 : Si (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ et arithmétique de raison r (r un réel), alors pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 + n \times r$. On dit que c'est une **relation fonctionnelle**.

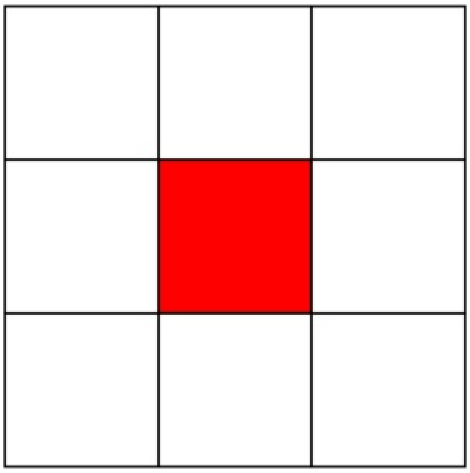
• Exemple : Reprenons la situation de Léonard. La suite (c_n) est arithmétique de raison $r = -30$ et de premier terme $c_0 = 3\ 000$. Ainsi pour tout n de $\mathbb{N}$: $c_n = 3\ 000 + n \times (-30) = 3\ 000 - 30n$.

Exercice n°3

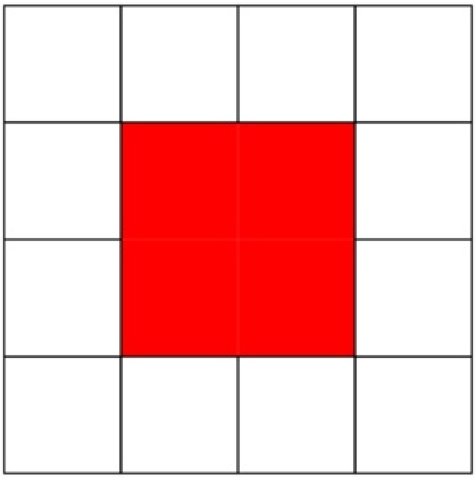
• Propriété 2 : Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$. Si pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = x + n \times y$ (avec x et y deux réels), alors (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = x$ et de raison y.

• Exemple : On considère une famille logique de motifs dont les deux premiers sont donnés ici :

Motif n° 1



Motif n° 2



• Pour tout entier naturel n, on note b_n le nombre de carrés blancs dans le motif n°(n + 1). On observe donc que $b_0 = 8$ et que $b_1 = 12$.

• Le motif n°(n + 1) comporte $(n + 3)^2$ carrés dont $(n + 1)^2$ carrés rouges. Donc le motif n°(n + 1) comporte $(n + 3)^2 - (n + 1)^2$ carrés blancs.

Ainsi pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a : $b_n = (n + 3)^2 - (n + 1)^2$

- $b_n = n^2 + 6n + 9 - (n^2 + 2n + 1)$
- $b_n = n^2 + 6n + 9 - n^2 - 2n - 1$
- $b_n = 4n + 8$

• On a montré que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $b_n = x + n \times y$ avec $x = 8$ et $y = 4$.

• Donc (b_n) est une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $b_0 = 8$.

IV. Comment étudier le sens de variation d'une suite arithmétique ?

• Propriété : Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et arithmétique de raison r (r un réel), alors :

- si $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante ;
- si $r < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante ;
- si $r = 0$, alors (u_n) est constante.

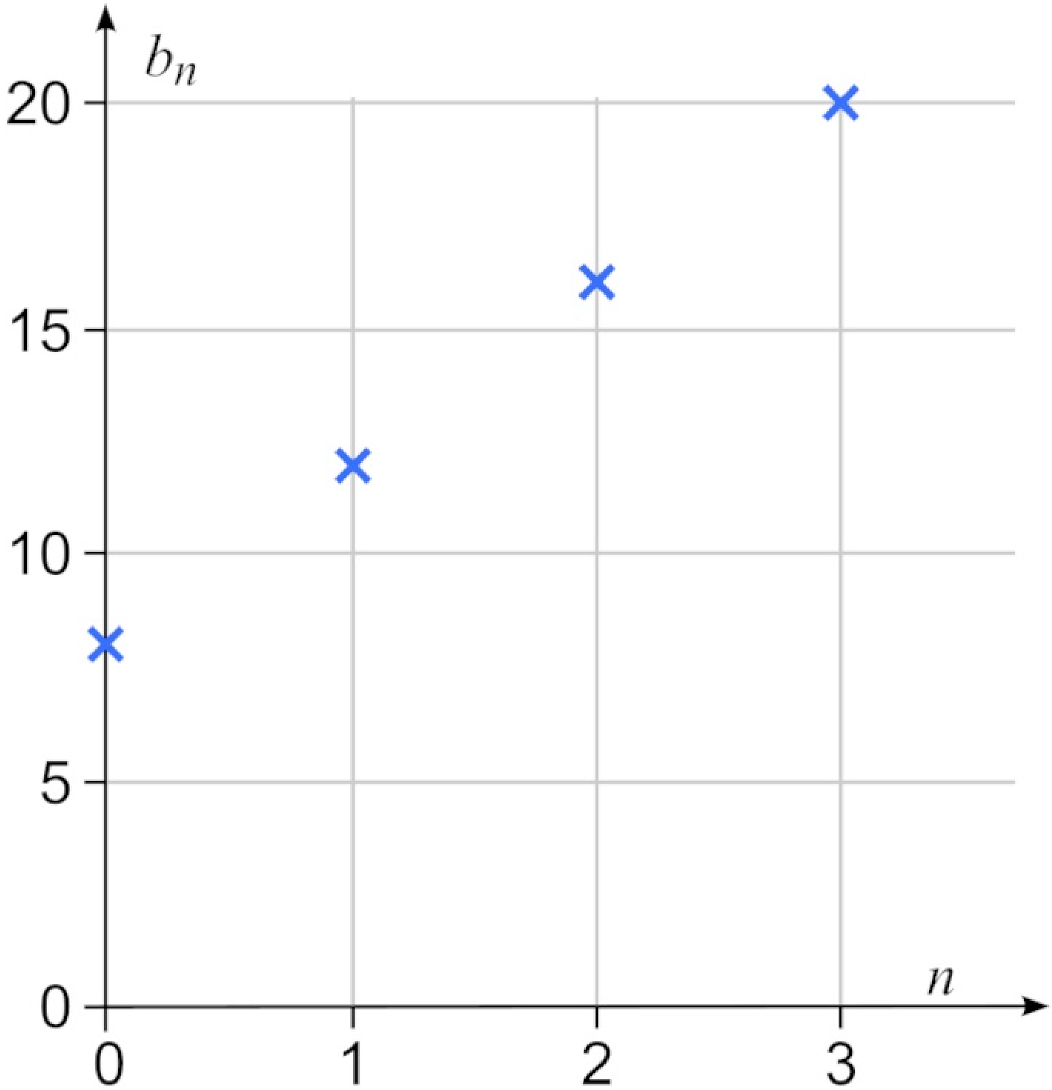
• Exemple : Soit (b_n) est une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $b_0 = 8$.
Comme $4 > 0$, alors (b_n) est strictement croissante.

V. Comment représenter graphiquement une suite arithmétique ?

On munit le plan d'un repère, de préférence orthogonal, voire orthonormé.

• **Définition** : Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et arithmétique de raison r (r un réel), alors la représentation graphique de la suite est l'ensemble des points M de coordonnées $M(n\ ;u_n)$.

• Exemple : Soit (b_n) est une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $b_0 = 8$.
On a donc pour tout entier n de $\mathbb{N}$: $b_n = 8 + 4n$.
Donc $b_0 = 8 + 4 \times 0 = 8$; $b_1 = 8 + 4 \times 1 = 12$; $b_2 = 8 + 4 \times 2 = 16$; $b_3 = 8 + 4 \times 3 = 30$.
Donc on va placer les premiers points de la représentation graphique de la suite (b_n) : les points A(0 ;8), B(1 ;12), C(2 ;16) et D(3 ;20).



• Remarque : On obtient un nuage de points et les points sont alignés. C'est pour cela que lorsqu'un phénomène est modélisé par une suite arithmétique, on parle d'**évolution linéaire**.

Exercice n°4

VI. Comment résoudre un problème de seuil ?

• Soit a, b et c trois réels (et a non nul). Pour résoudre une équation linéaire du premier degré d'inconnue n du type $a \times n + b = c$, on va procéder ainsi :

$a \times n + b = c \Leftrightarrow a \times n + b - b = c - b \Leftrightarrow an = c - b \Leftrightarrow \frac{an}{a} = \frac{c-b}{a} \Leftrightarrow n = \frac{c-b}{a}$

• On devra vérifier que le nombre $\frac{c-b}{a}$ est bien un entier naturel. On peut aussi utiliser un script du type :

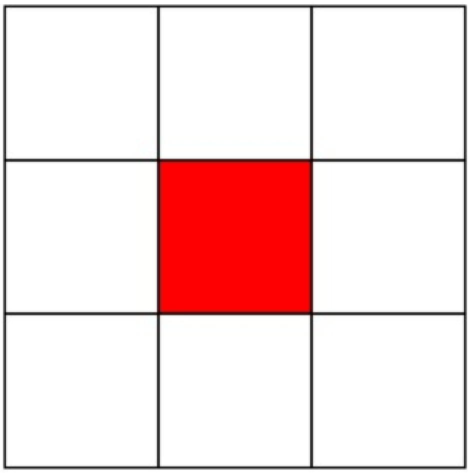
```python
def seuil(u0, r, c):
    n=0
    u=u0
    while u!=c:
        n=n+1
        u=u+r
    return n
```

Dans ce script :

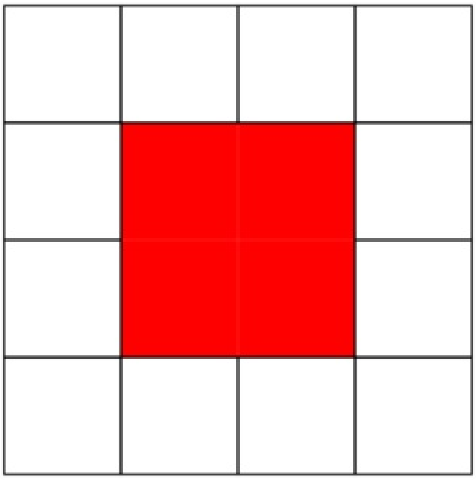
- u_0 est le premier terme de la suite arithmétique ;
- r est la raison de la suite ;
- c est la valeur que l'on souhaite atteindre.

Exemple : On considère une famille logique de motifs dont les deux premiers sont donnés ici :

Motif n° 1



Motif n° 2



- Pour tout entier naturel n, on note b_n le nombre de carrés blancs dans le motif n°$(n+1)$.
- On observe donc que $b_0 = 8$ et que $b_1 = 12$.
- On a montré que pour tout entier naturel n : $b_n = 4n + 8$.

• Est-il possible de trouver un motif dont le nombre de carrés blancs sera égal à 1 492 ?
On doit donc résoudre l'équation : $b_n = 1\,492$.
$4n + 8 = 1\,492 \Leftrightarrow 4n + 8 - 8 = 1\,492 - 8 \Leftrightarrow 4n = 1\,484 \Leftrightarrow \frac{4n}{4} = \frac{1\,484}{4} \Leftrightarrow n = 371$
371 est bien un entier. Donc $b_{371} = 1\,492$. Cela signifie que le motif n°(371 + 1) soit le motif n° 372 comporte exactement 1 492 carrés blancs.

• Remarque : on peut aussi avoir besoin de résoudre des inéquations du type $a \times n + b > c$.

- Si $a > 0$, alors $a \times n + b > c \Leftrightarrow n > \frac{c - b}{a}$
- Si $a < 0$, alors $a \times n + b > c \Leftrightarrow n < \frac{c - b}{a}$

Exercice n°5